[Diss. Berlin
1879]

Ueber die

Integration eines Differentialgleichungssystems

von der Form

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2$$

durch elliptische Funktionen.

Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doctorwürde an der Königl. Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

von

PAUL HOYER.

Opponenten: Herr cand. math. Otto Mahly.
» stud. phil. Otto Reinhardt.
» stud. phil. Max Wendt.

Berlin 1879.

Königliche Hofbuchdruckerei von Carl Friese in Magdeburg.

SEINEM

VEREHRTEN LEHRER

HERRN

PROFESSOR DR. WEIERSTRASS.

Der erste Theil dieser Arbeit hat es zu thun mit der Untersuchung der Natur des Integrales eines Differentialgleichungssystems der vorgelegten Form für den Fall, dass keine Abhängigkeit unter den einzelnen Coefficienten stattfindet, und wir beweisen da den Satz:

I.... Wenn keine Abhängigkeit unter den Coefficienten des vorgelegten Differentialgleichungssystems stattfindet, so besitzt ein Integral desselben entweder Grenzstellen im Endlichen, oder es besteht aus 3 beständig converg. Reihen.

Denken wir uns das Element hergestellt, welches uns das System der Funktionen x_1 x_2 x_3 darstellt in der Nähe einer Stelle t'. Die Funktionen mögen sich in der Nähe von t' regulär erhalten, die Entwickelungen daher noch Potenzen mit pos. ganzzahligen Exponenten fortschreiten. Nach einem bekannten Satze über das Integral eines Differentialgleichungssystems der gegebenen Form erstreckt sich der Convergenzbezirk einer jeden der Entwickelungen für x_1 x_2 x_3 entweder ins Unendlilche, oder es giebt auf der Grenze des gemeinschaftlichen Convergenzbezirkes mindestens einen Punkt t'', in dessen Nähe eine der 3 Funktionen unendlich wird. Das letztere wollen wir als hier zutreffend annehmen, also beständige Convergenz der Reihen für x_1 x_2 x_3 ausschliessen. Nehmen wir ferner an, dass der erwähnte Punkt auch keine Grenzstelle für das System der Funktionen x_1 x_2 x_3 sei, so wollen wir jetzt nachweisen, dass zwischen den Coefficienten des Differentialgleichungssystems, dem die drei Funktionen x_1 x_2 x_3 genügen, eine gewisse Abhängigkeit bestehen muss. Wir nehmen hierzu an, das Coefficientensystem (a, b, c) in dem vorgelegten Differentialgleichungssystem genüge keiner der Gleichungen.

$\Delta = 0,\ a_1' = 0,\ b_2' = 0,\ c_3' = 0,\ a_1 = 0,\ b_2 = 0,\ c_3 = 0$ .... 1, wo Δ die Determinante des Coefficientensystems (a, b, c), a_1', b_2', c_3' die a_1, b_2, c_3 entsprechenden Unterdeterminanten sind. Da nun t'' keine Grenzstelle sein soll, so lässt sich das System der Funktionen x_1 x_2 x_3 in der Nähe desselben durch Reihen der folgenden Form darstellen:

$$x_1 = A_1\, u^{-n} + A_2\, u^{-n+1} + A_3\, u^{-n+2} \dots\dots$$
$$x_2 = B_1\, u^{-n} + B_2\, u^{-n+1} + B_3\, u^{-n+2} \dots\dots$$
$$x_3 = C_1\, u^{-n} + C_2\, u^{-n+1} + C_3\, u^{-n+2} \dots\dots$$

wo $u = (t-t'')^{\frac{1}{r}}$ eine r^{te} Wurzel von $t-t''$ bedeutet. Dann ist weiter

$$\frac{dx1}{dt} = -\frac{n}{r} A_1\, u^{-n-r} - \frac{n-1}{r} A_2\, u^{-n-r+1} - \frac{n-2}{r} A_3\, u^{-n-r+2} - \dots\dots = (A)$$

und ähnliche Reihen ergeben sich für $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$, sie seien bezeichnet bezüglich mit (B), (C). Ferner hat man:

$$a_1\, x_2\, x_3 + a_2\, x_3\, x_1 + a_3\, x_1\, x_2 = (a_1\, B_1\, C_1 + a_2\, C_1\, A_1 + a_3\, A_1\, B_1)\, u^{-2n}$$
$$+ \left\{ a_1\, (B_1\, C_2 + B_2\, C_1) + a_2\, (C_1\, A_2 + A_1\, C_2) + a_3\, (A_1\, B_2 + A_2\, B_1) \right\} u^{-2n+1} + \dots\dots = (a)$$

und ähnliche Reihen ergeben sich für die Entwickelungen der rechten Seiten der zweiten und dritten Gleichung in dem betrachteten Differentialgleichungssystem, sie seien bezeichnet bezüglich mit (b), (c). Nun muss die Reihe (A) mit (a), (B) mit (b), (C) mit (c) übereinstimmen. Vergleichen wir daher die Coefficienten gleich hoher Potenzen. Nun können wir, da wenigstens eine der Funktionen $x_1\ x_2\ x_3$ für $u = 0$ unendlich werden soll, einen der Coefficienten A_1, B_1, C_1 von Null verschieden voraussetzen, etwa A_1, so dass also der erste Coefficient in (A) von Null verschieden ist; dann, zeigen wir jetzt, muss dies auch für (a) gelten. Im entgegengesetzten Fall nämlich hätten wir

$$0 = a_1\ B_1\ C_1 + b_2\ C_1\ A_1 + a_3\ A_1\ B_1 \text{ und ebenso auch}$$
$$0 = b_1\ B_1\ C_1 + b_2\ C_1\ A_1 + b_3\ A_1\ B_1$$
$$0 = c_1\ B_1\ C_1 + c_2\ C_1\ A_1 + c_3\ A_1\ B_1$$

woraus, da Δ von Null verschieden ist, folgen würde:

$$B_1\ C_1 = 0,\ C_1\ A_1 = 0,\ A_1\ B_1 = 0$$

und weil auch A_1 nicht Null sein soll:

$$C_1 = 0,\ B_1 = 0.$$

Nehmen wir jetzt an, dass die Coefficienten in (a) sämmtlich gleich Null seien bis zu dem Coefficienten von $u^{-2n+k-1}$ (incl.) und dass dies auch gelte von den Coefficienten in x_2, x_3 bis zu denjenigen von u^{-n+k-1} (incl.) Dann werden die Coefficienteu von u^{-2n+k} in (a), (b), (c) bezüglich:

$$A_1\ (a_2\ C_{k+1} + a_3\ B_{k+1}),\ A_1\ (b_2\ C_{k+1} + b_3\ B_{k+1}),\ A_1\ (c_2\ C_{k+1} + c_3\ B_{k+1}).$$

Sollte nun auch der erste Coefficient in (a) mit dem ersten in (A) übereinstimmen, so hätte man doch, weil $B_1 = C_1 = 0$ sein muss:

$$b_2\ C_{k+1} + b_3\ B_{k+1} = 0,\ c_2\ C_{k+1} + c_3\ B_{k+1} = 0$$

und hieraus, weil die Determinante a'_1 von Null verschieden sein soll:

$$B_{k+1} = 0,\ C_{k+1} = 0,$$

folglich auch
$$A_1\ (a_2\ C_{k+1} + a_3\ B_{k+1}) = 0$$

d. h. auch der Coefficient von u^{-2n+k} in (a) ist Null. Die diesem Schlusse zu Grunde liegenden Voraussetzungen würden nun für den Fall $k = 1$ gelten, wenn wir annähmen, dass die ersten Glieder in (A) und (a) nicht mit einander übereinstimmen, sie würden daher allgemein, für jedes k gelten, und die Coefficienten in (a) müssten also sämmtlich verschwinden, was nicht möglich ist, da in der Reihenentwickelung (A) der erste Coefficient von Null verschieden sein soll. Die ersten Glieder in (A) und (a), (B) und (b), (C) und (c) müssen somit mit einander übereinstimmen, und man erhält die Gleichungen:

$$-n - r = -2n,\ n = r$$

2
$$\begin{cases} -A_1 = a_1\ B_1\ C_1 + a_2\ C_1\ A_1 + a_3\ A_1\ B_1 \\ -B_1 = b_1\ B_1\ C_1 + b_2\ C_1\ A_1 + b_3\ A_1\ B_1 \\ -C_1 = c_1\ B_1\ C_1 + c_2\ C_1\ A_1 + c_3\ A_1\ B_1 \end{cases}$$

Wir haben diese Gleichungen gefolgert unter der Voraussetzung, dass A_1 derjenige der 3 Coefficienten $A_1\ B_1\ C_1$ sein solle, welcher von Null verschieden ist. Man überzeugt sich indessen leicht, dass man die Schlüsse, welche zu diesen Gleichungen führten, auch noch machen kann, wenn man B_1 oder C_1 für diesen Coefficienten annimmt, da die an Stelle von a'_1 im Beweise alsdann auftretende Unterdeterminante b'_2 oder c'_3 ebenfalls von Null verschieden angenommen wird. Bei der von uns über das Coefficientensystem (a, b, c) gemachten Annahme, es solle dasselbe keiner der Gleichungen 1 genügen, lässt sich nun mit Leichtigkeit nachweisen, dass das Verschwinden einer der Grössen $A_1\ B_1\ C_1$ in einem dem Gleichungssystem 2 genügenden Werthsystem das Verschwinden der beiden übrigen Grössen nach sich zieht, in dem Coefficientensystem $A_1\ B_1\ C_1$ sind daher die Coefficienten $A_1\ B_1\ C_1$ sämmtlich von Null verschieden und dies beweiset, mit der Gleichung $n = r$ zusammen, den Satz:

II . . . . . Wird an einer Stelle t'' eine der dem betrachteten Differentialgleichungssystem, in welchem die Coefficienten keine der Gleichungen 1 befriedigen, genügenden Funktionen x_1 x_2 x_3 unendlich gross, so werden auch die beiden übrigen Funktionen an dieser Stelle unendlich und zwar ist die Ordnungszahl für jede derselben gleich 1.

Wir behandeln jetzt zunächst das Gleichungssystem 2. Um dasselbe nach den Grössen A_1 B_1 C_1 aufzulösen, setzen wir

$$\frac{1}{A_1} = u_1, \; \frac{1}{B_1} = u_2, \; \frac{1}{C_1} = u_3.$$

Die Gleichungen für u_1 u_2 u_3 werden dann:

3
$$\left\{\begin{array}{l} - u_2 \, u_3 = a_1 \, u_1 + a_2 \, u_2 + a_3 \, u_3 \\ - u_3 \, u_1 = b_1 \, u_1 + b_2 \, u_2 + b_3 \, u_3 \\ - u_1 \, u_2 = c_1 \, u_1 + c_2 \, u_2 + c_3 \, u_3 \end{array}\right.$$

Lösen wir hier die beiden ersten Gleichungen nach u_1, u_2 auf, so erhalten wir:

4
$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = u_3 \begin{vmatrix} a_2 + u_3, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, & a_2 + u_3 \\ b_1 + u_3, & b_2 \end{vmatrix} \\ u_2 = u_2 \begin{vmatrix} b_1 + u_3, & b_3 \\ a_1, & a_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, & a_2 + a_3 \\ b_1 + u_3, & b_2 \end{vmatrix} \end{array}\right.$$

und setzen wir nun diese Ausdrücke in die dritte Gleichung ein, so ergiebt sich als Gleichung für u_3 nach einigen einfachen Umformungen und nach Division durch u_3

5
$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2 + u_3, & a_3 \\ b_1 + u_3, & b_2, & b_3 \\ c_1, & c_2, & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1, & a_2 + u_3 \\ b_1 + u_3, & b_2 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} a_2 + u_3, & a_3 \\ b_2, & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 + u_3, & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Factor u_3, der noch zu der linken Seite dieser Gleichung hinzutreten müsste, ist hier unterdrückt, da er zu der dem Gleichungssystem 3 stets zukommenden Lösung $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ führt. Soll nämlich für ein Werthsystem beständig u_3 Null sein, so braucht man nur das Coefficientensystem (a, b, c) so anzunehmen, dass keine der Gleichungen 1 besteht, um zu erkennen, dass dann stets $u_1 = u_2 = 0$ sein muss, das Werthsystem ist also dann von dem Coefficientensystem (a, b, c) unabhängig. Für ein von den Coefficienten abhängiges, endliches Werthsystem, in dem also keine der Grössen u_1, u_2, u_3 beständig unendlich ist, wird daher u_3 der Gleichung 5 genügen. Umgekehrt aber auch geben die Formeln 4 zu einer Wurzel der Gleichung 5 ein den Gleichungen 3 genügendes Werthsystem. Dies könnte nur dann nicht eintreten, wenn der Nenner in den Formeln 4 beständig Null wäre für eine der Wurzeln von 5, was aber nicht der Fall sein kann, da diese Wurzel nur von a_1, b_1, a_2, b_2 abhängen würde, nach Gleichung 5 aber einer der Zähler in 4 verschwinden müsste und jeder dieser Zähler auch a_3, b_3 enthält. Da nun auch die Gleichung 5 im Allgemeinen keine 2 gleichen Wurzeln besitzt, wie man durch Berechnung der Discriminante für ein specielles System der Coefficienten a, b, c erkennen kann, so kann man sagen, die Anzahl der den Gleichungen 3 genügenden, von den Coefficienten a, b, c abhängigen, endlichen Werthsysteme ist gleich dem Grade der Gleichung 5, also gleich 4, und die Werthe u_3 sind die Wurzeln dieser Gleichung. Da ferner in einem von den Coefficienten a, b, c abhängigen Werthsysteme A_1, B_1, C_1, welches den Gleichungen 2 genügt, kein Werth beständig Null ist, so folgt auch, dass die Anzahl dieser Werthsysteme gleich 4 ist und dass die Werthe C_1 die Wurzeln sind der reciproken Gleichung von 5.

Wir kehren jetzt wieder zur Vergleichung der gleich hohen Potenzen in den durch Gleichsetzen der Reihen (A) und (a), (B) und (b), (C) und (c) entstehenden Gleichungen zurück. In den Reihen

für x_1, x_2, x_3 können offenbar mehrere der auf A_1, B_1, C_1 folgenden Coefficientensysteme verschwinden und wir wollen annehmen, dass das Coefficientensystem A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1} das erste nicht verschwindende Coefficientensystem sei. Dann ist in den Reihen (A), (B), (C) das erste nicht verschwindende Coefficientensystem:

$$-\frac{r-k}{r} A_{k+1}, \; -\frac{r-k}{r} B_{k+1}, \; -\frac{r-k}{r} C_{k+1}$$

wobei zu beachten ist, dass in den sämmtlichen Reihen jetzt an Stelle von n die Zahl r zu setzen ist. Es gehört dieses Coefficientensystem den Gliedern an, welche u^{-2r+k} enthalten, das mit demselben übereinstimmende Coefficientensystem in den Reihen (a), (b), (c) muss daher ebenfalls aus den mit u^{-2r+k} multiplicirten Coefficienten bestehen. Nun ist der Coefficient von u^{-2r+k} in (a):

$$a_1 \left(B_1 C_{k+1} + C_1 B_{k+1}\right) + a_2 \left(C_1 A_{k+1} + A_1 C_{k+1}\right) + a_3 \left(B_1 A_{k+1} + A_1 B_{k+1}\right)$$

und hieraus ergeben sich die entsprechenden Coefficienten in (b) und (c) durch Vertauschen von a_1, a_2, a_3 mit respective b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3. Man erhält daher die Gleichungen:

$$-\frac{r-k}{r} A_{k+1} = a_1 \left(B_1 C_{k+1} + C^1 B_{k+1}\right) + a_2 \left(C_1 A_{k+1} + A_1 C_{k+1}\right) + a_3 \left(B_1 A_{k+1} + A_1 B_{k+1}\right)$$

$$-\frac{r-k}{r} B_{k+1} = b_1 \left(B_1 C_{k+1} + C_1 B_{k+1}\right) + b_2 \left(C_1 A_{k+1} + A_1 C_{k+1}\right) + b_3 \left(B_1 A_{k+1} + A_1 B_{k+1}\right)$$

$$-\frac{r-k}{r} C_{k+1} = c_1 \left(B_1 C_{k+1} + C_1 B_{k+1}\right) + c_2 \left(C_1 A_{k+1} + A_1 C_{k+1}\right) + c_3 \left(B_1 A_{k+1} + A_1 B_{k+1}\right)$$

oder anders geschrieben:

$$\left(a_2 C_1 + a_3 B_1 - \frac{k-r}{r}\right) A_{k+1} + \left(a_3 A_1 + a_1 C_1\right) B_{k+1} + \left(a_1 B_1 + a_2 A_1\right) C_{k+1} = 0$$

$$\left(b_2 C_1 + b_3 B_1\right) A_{k+1} + \left(b_3 A_1 + b_1 C_1 - \frac{k-r}{r}\right) B_{k+1} + \left(b_1 B_1 + b_2 A_1\right) C_{k+1} = 0$$

$$\left(c_2 C_1 + c_3 B_1\right) A_{k+1} + \left(c_3 A_1 + c^1 C_1\right) B_{k+1} + \left(c_1 B_1 + c_2 A_1 - \frac{k-r}{r}\right) C_{k+1} = 0.$$

Sollen diese Gleichungen für ein von Null verschiedenes Werthsystem A_{k+1}, B_{k+1}, C_{k+1} bestehen, so müssen die Coefficienten a, b, c die Gleichung befriedigen:

$$6 \qquad \begin{vmatrix} a_2 C_1 + a_3 B_1 - \frac{k-r}{r}, & a_3 A_1 + a_1 C_1, & a_1 B_1 + a_2 A_1 \\ b_1 C_1 + b_3 B_1, & b_3 A_1 + b_1 C_1 - \frac{k-r}{r}, & b_1 B_1 + b_2 A_1 \\ c_1 C_1 + c_3 B_1, & c_3 A_1 + c_1 C_1, & c_1 B_1 + c_2 A_1 - \frac{k-r}{r} \end{vmatrix} = 0,$$

in welcher die Grössen A_1, B_1, C_1 durch die Gleichungen 2 von den Coefficienten a, b, c abhängig sind, während k und r positive ganze Zahlen sind. Man kann dies Resultat folgendermassen aussprechen: Man denke sich in der linken Seite dieser Gleichung nach einander die vier von den Coefficienten a, b, c abhängigen, den Gleichungen 2 genügenden Werthsysteme A_1, B_1, C_1 eingesetzt und setze für $-\frac{k-r}{r}$ den Buchstaben z. Denkt man sich nun in den so entstehenden 4 Ausdrücken A_1, B_1 mittelst der Formeln 4 durch C_1 ausgedrückt und nun die vier Ausdrücke mit einander multiplicirt, so erhält man eine Funktion, die rational und ganz ist in Beziehung auf z, dagegen gebrochen in Beziehung auf C_1. Der Zähler derselben aber, sowie der Nenner, werden symmetrische Funktionen der 4 Wurzeln C_1, und lassen sich daher als rationale Funktionen der Coefficienten der reciproken Gleichung von 5, folglich auch der Coefficienten a, b, c darstellen. So erhalten wir eine rationale ganze Funktion von z, deren Coefficienten rationale Funktionen sind von a, b, c und die wir mit F (z, a, b, c) bezeichnen wollen. Die Bedingung, welcher durch die Gleichung 6 das Coefficientensystem (a, b, c) unter-

worfen wird, besteht dann darin, dass die Funktion F (z, a, b, c) für $z = -\frac{k-r}{r}$ verschwindet. Da wir, um die Gleichung 6 zu folgern, nur der Annahme bedurften, dass in den Reihen für x_1, x_2, x_3 nicht die sämmtlichen auf A_1, B_1, C_1 folgenden Coefficientensysteme verschwinden, im entgegengesetzten Fall aber wir zu der dem Differentialgleichungssystem stets zukommenden Lösung gelangen:

7 $$x_1 = \frac{A_1}{t-t'}, \quad x_2 = \frac{B_1}{t-t'}, \quad x_3 = \frac{C_1}{t-t'},$$

so können wir das gewonnene Resultat als Satz aussprechen:

III . . . Lässt sich das vorgelegte Differentialgleichungssystem durch ein System von Funktionen integriren, das nicht die Gestalt des Systems 7 hat, welches sich ferner nicht durch drei beständig convergente Reihen darstellen lässt, und welches auch keine Grenzstellen im Endlichen hat, so verschwindet für das Coefficientensystem in demselben entweder die Funktion F (z, a, b, c), wenn man z einen gewissen Werth beilegt, der die Gestalt eines negativen oder positiven echten Bruches oder eines negativen unechten Bruches hat, oder es besteht für das Coefficientensystem eine der Gleichungen 1.

Wir bemerken noch, dass die Bedingung, dass die Gleichung 6 für $k = r$ bestehe, also die Gleichung F (z, a, b, c) = 0 für z = 0, unter derjenigen enthalten ist, dass eine der Gleichungen 1 bestehe, denn, wie man sich leicht überzeugt, reducirt sich für den Fall $k = r$ die linke Seite von 6 auf $2\, A_1\, B_1\, C_1\, \Delta$, das Bestehen der Gleichung 6 für $k = r$ fordert also, dass $\Delta' = 0$ werde oder wenigstens eine der Grössen A_1, B_1, C_1 in den vier den Gleichungen 2 genügenden Werthsystemen verschwinde: wie man aber durch Aufstellen der Resultante für C_1, sowie derjenigen für B_1 und A_1 erkennt, bewirkt das Nichtbestehen der Gleichungen 1, dass keine der Grössen A_1, B_1, C_1 Null oder Unendlich werde, denn die linken Seiten der Gleichungen 1 treten als die Constanten und die Coefficienten der höchsten Glieder in diesen Gleichungen auf.

Der zuletzt bewiesene Satz beweist nun unmittelbar auch die Richtigkeit des Satzes I, falls wir noch nachweisen können, dass keine der Gleichungen $F\left(\frac{r-k}{r}, a, b, c\right) = 0$, in welchen k und r positive ganze Zahlen sind, identisch für alle Werthe der Coefficienten a, b, c besteht und wir von dem unbedeutenden Fall, dass das Integral die Form 7 hat, absehen.

Um den angedeuteten Nachweis zu führen, ertheilen wir den Coefficienten a, b, c die folgenden Werthe:

$$a_1 = 1,\ a_2 = t,\ a_3 = 0,\ b_1 = 0,\ b_2 = 1,\ b_3 = 0,\ c_1 = 0,\ c_2 = t,\ c_3 = 1,$$

t bedeutet dabei eine unbestimmte Zahl. Zunächst besteht für dieses Werthsystem keine der Gleichungen 1, wir weisen jetzt nach, dass auch die Funktion F (z, a, b, c) für dasselbe nicht verschwindet, wenn man für z einen positiven echten Bruch oder eine negative rationale Zahl setzt. Ermitteln wir zunächst die 4 Werthsysteme A_1, B_1, C_1.

Für das gewählte Werthsystem ist nun die Gleichung 5 leicht zu lösen, denn sie geht in die Gleichung über

$$\begin{vmatrix} 1, & t + u_3 \\ u_3, & 1 \end{vmatrix}^2 = 0$$

oder $$(1 - u_3\, t - u_3^2)^2 = 0.$$

Wie die Gestalt dieser Gleichung erkennen lässt, fallen je zwei von den vier Werthen u_3 zusammen, so dass man nur 2 von einander verschiedene Werthe erhält, welche geliefert werden durch die Gleichung $$1 - u_3\, t - u_3^2 = 0.$$

Die reciproke Gleichung hiervon ist $C_1{}^2 - C_1\, t - 1 = 0$.

Sie liefert für C_1 die Werthe: $C_1 = \frac{1}{2}\left(t \pm \sqrt{t^2 + 4}\right)$.

Bezeichnen wir daher die vier Werthe C_1, welche den vier Werthsystemen A_1, B_1, C_1 entsprechen mit C_1', C_1'', C_1''', C_1^{IV}, so können wir dieselben darstellen durch die Formeln:

$$C_1' = \tfrac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; C_1'' = \tfrac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; C_1''' = \tfrac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; C_1^{IV} = \tfrac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}).$$

Was die dazu gehörenden Werthe B_1, A_1 betrifft, so erhalten wir diese folgendermassen:

Da der Nenner in den Formeln 4 verschwindet, so können wir diese Formeln nicht zur Darstellung der den Werthen C_1 zugehörenden Werthe A_1, B_1 benutzen. Wir können aber aus dem Umstande, dass dieser Nenner verschwindet, folgern, dass von den beiden Gleichungen

$$u_1 + (t + u_3)\, u_2 = 0,\; u_3\, u_1 + u_2 = 0,$$

welche die beiden ersten Gleichungen 3 liefern, eine die Folge der andern ist. Setzen wir also $u_2 = -u_1 u_3$, so wird damit auch der ersten Gleichung genügt. Diesen Werth für u_2 führen wir nun ein in der dritten der Gleichungen 4 und erhalten daraus eine Gleichung, welche u_1 bestimmt.

Diese Gleichung ist: $u_1^{\,2} u_3 = c_1\, u_1 - u_1\, u_3 + c_3\, u_3$,

$$\text{also:}\quad u_1^{\,2} u_3 = -t\, u_1\, u_3 + u_3$$
$$u_1^{\,2} + t\, u_1 - 1 = 0.$$

Es ergiebt sich aus ihr: $\frac{1}{u_1} = A_1 = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4})$.

Verbindet man also einen der beiden für C_1 erhaltenen Werthe mit einem der beiden für A_1 erhaltenen Werthe und mit diesen beiden alsdann B_1 durch die aus $u_2 = -u_1 u_3$ sich ergebende Gleichung

$$B_1 = -C_1\, A_1,$$

so erhält man stets ein den Gleichungen 3 genügendes Werthsystem und die Anzahl dieser Werthsysteme ist offenbar gleich 4; es sind also die sämmtlichen Werthsysteme, welche von den Coefficienten abhängen.

Combinirt man nun $C_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$ mit $A_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$, so erhält man als dazugehörend

$$B_1' = -\tfrac{1}{2}(t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}).$$

Combinirt man dagegen $C_1^{IV} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4})$ mit $A_1^{IV} = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4})$, so erhält man

$$B_1^{IV} = 1.$$

Setzt man nun

$$A_1' = \tfrac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; A_1'' = \tfrac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; A_1''' = \tfrac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; A_1^{IV} = \tfrac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4},$$

so werden die Combinationen $C_1' A_1'$; $C_1'' A_1''$; $C_1''' A_1'''$; $C_1^{IV} A_1^{IV}$ die vier von einander verschiedenen Combinationen der Grössen C_1 und A_1 liefern, und man wird daher die vier den Gleichungen 3 genügenden Werthsysteme für den vorliegenden Fall darstellen können in folgender Weise:

$$8\quad \left\{\begin{array}{l} C_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; A_1' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; B_1' = -\frac{1}{2}(t^2 + 2 - t\sqrt{t^2+4}). \\ C_1'' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; A_1'' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; B_1'' = -\frac{1}{2}(t^2 + 2 + t\sqrt{t^2+4}). \\ C_1''' = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; A_1''' = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; B_1''' = 1. \\ C_1^{IV} = \frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2+4}),\; A_1^{IV} = \frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2+4}),\; B_1^{IV} = 1. \end{array}\right.$$

Wir bezeichnen jetzt die linke Seite der Gleichung 6, indem wir uns an Stelle von $\frac{r-k}{r}$ z geschrieben denken mit R (z, a, b, c, A_1 B_1 C_1) und denken uns diesen Ausdruck nach Potenzen von z entwickelt. Diese Entwickelung ist leicht ausführbar, wenn man sich jede Verticalreihe der Determinante R zusammengesetzt aus drei Verticalreihen denkt, indem man die Reihen z 0 0, 0 z 0, 0 0 z als Verticalreihen mitrechnet, und nun die Determinante in eine Summe von 27 Determinanten zerlegt, wir wollen daher hier nur die Summe der Glieder mit z^1 betrachten, um für sie eine etwas

einfachere Form mitzutheilen als die ist, welche sich unmittelbar ergiebt. Man erhält zunächst leicht folgenden Ausdruck für diese Summe:

$$z A_1 \left\{ A_1 \begin{vmatrix} b_3 & b_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ z B_1 \left\{ A_1 \begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \right\}$$

$$+ z C_1 \left\{ A_1 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ c_2 & c_1 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} \right\}$$

oder, wenn wie die a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 entsprechenden Unterdeterminanten bezeichnen mit resp. a'_1, a'_2, a'_3, b'_1, b'_2, b'_3, c'_1, c'_2, c'_3:

$$z A_1 \left\{ - A_1 a'_1 + B_1 b'_1 + C_1 c'_1 \right\} + z B_1 \left\{ A_1 a'_2 - B_1 b'_3 + C_1 c'_2 \right) + z C_1 \left\{ A_1 a'_3 + B_1 b'_3 - C_1 c'_3 \right\}$$

Benutzt man weiter die durch Auflösen des Gleichungssystems 2 nach den Produkten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ sich ergebenden Gleichungen, so kann man an Stelle der Coefficienten von $z A_1$, $z B_1$, $z C_1$ hier auch schreiben bezüglich:

$$- B_1 C_1 \Delta - 2 A_1 a'_1, \; - C_1 A_1 \Delta - 2 B_1 b'_2, \; - A_1 B_1 \Delta - 2 C_1 c'_3$$

sodass für das Glied mit z' sich ergiebt:

$$- z \left\{ 3 A_1 B_1 C_1 \Delta + 2 (A_1^2 a'_1 + B_1^2 b'_2 + C_1^2 c'_3) \right\}.$$

Für den ganzen Ausdruck $R (z, a, b, c, A_1, B_1, C_1)$ erhält man schliesslich:

$$R (z, a, b, c, A_1 B_1 C_1) = z^3 + z^2 \left\{ (c_1 + a_3) B_1 + [(a_2 + b_1) C_1 + (b_3 + c_2) A_1 \right\}$$
$$- z \left\{ 3 A_1 B_1 C_1 \Delta + 2 (a'_1 A_1^2 + b'_2 B_1^2 + c'_3 C_1^2) \right\} + 2 A_1 B_1 C_1 \Delta$$

Hier haben wir nun das spezielle Coefficientensystem und für A_1, B_1, C_1 die vier entsprechenden Werthsysteme 8 einzusetzen, und die Wurzeln der vier so entstehenden Gleichungen $R (z, a, b, c, A_1 B_1 C_1) = 0$ zu bestimmen. Von diesen vier Gleichungen können wir die beiden ersten, welche durch Einsetzen der Werthsysteme $A'_1 B'_1 C'_1$, A''_1, B''_1, C''_1 hervorgehen, und ebenso die beiden letzten, durch Einsetzen der beiden übrigen Werthsysteme hervorgehenden zu einer Gleichung zusammenfassen, da stets eine von diesen beiden Gleichungen aus der andern hervorgeht dadurch, dass das Zeichen von $\sqrt{t^2 + 4}$ geändert wird. Die Gleichung, welche die durch Einsetzen von $A'_1 B'_1 C'_1$, $A'_1 B''_1 C''_1$ hervorgehenden Gleichungen zusammenfasst, ist dann die folgende:

$$z^3 + t (t \pm \sqrt{t^2 + 4}) z^2 + \frac{t^4 - 6 \pm t (t^2 - 2) \sqrt{t^2 + 4}}{2} z - \left\{ t^4 + 4t^2 + 2 \pm t (t^2 + 2) \sqrt{t^2 + 4} \right\} = 0$$

Setzt man hier $z = 2$ ein, so verschwindet die linke Seite dieser Gleichung, $z = 2$ ist also eine der drei Wurzeln. Dividirt man durch $z - 2$, so erhält man als Gleichung für die beiden übrigen Wurzeln

$$z^2 + (t^2 + 2 \pm t \sqrt{t^2 + 4}) z + \frac{t^4 + 4 t^2 + 2 \pm t (t^2 + 2) \sqrt{t^2 + 4}}{2} = 0$$

Von den beiden durch diese Gleichung dargestellten Gleichungen hat eine jede zwei gleiche Wurzeln und zwar erhält man, wenn man das obere Zeichen wählt:

$$z_1 = z_2 = - \frac{t^2 + 2 + t \sqrt{t^2 + 4}}{2}.$$ Für das untere Zeichen:

$$z'_1 = z'_2 = - \frac{t^2 + 2 - t \sqrt{t^2 + 4}}{2}.$$

Damit sind die Wurzeln der beiden ersten zu betrachtenden Gleichungen ermittelt. Setzen wir jetzt die Werthsysteme $A_1''' B_1''' C_1'''$, $A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}$ in $R(z, a, b, c, A_1 B_1 C_1) = 0$ ein, so wird diese Gleichung:

$$z^3 + t^2 z^2 - (1 + 2 t^2) z - 2 = 0.$$

Die beiden Werthsysteme $A_1''' B_1''' C_1'''$, $A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}$, führen also zu derselben Gleichung. Auch hier enthält die linke Seite den Werth $z = 2$ als Wurzel. Die Gleichung für die beiden übrigen Wurzeln ist:

$$z^2 + (t^2 + 2) z + 1 = 0$$

und diese Gleichung führt zu den Wurzeln;

$$Z_1'' = -\frac{t^2 + 2 + t\sqrt{t^2 + 4}}{2},\; Z_2'' = -\frac{t^2 + 2 - t\sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

Die Werthe von z, welche den Werthsystemen $A_1''' B_1''' C_1'''$, $A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}$ entsprechen, sind daher sämmtlich enthalten unter den Ausdrücken:

$$2, -\frac{t^2 + 2 + t\sqrt{t^2 + 4}}{2}, -\frac{t^2 + 2 - t\sqrt{t^2 + 4}}{2}$$

und unter eben diesen Ausdrücken sind auch die Wurzeln der Gleichung $R(z, a, b, c, A_1 B_1 C_1) = 0$ enthalten, welche entsprechen den Werthsystemen $A_1' B_1' C_1'$, $A_1'' B_1'' C_1''$. Keiner dieser drei Ausdrücke ist nun gleich einer negativen rationalen Zahl, oder gleich einem positiven echten Bruch, für einen solchen Werth von z verschwindet also $F(z, a, b, c)$ nicht identisch, denn es verschwindet diese Funktion nicht für das soeben betrachtete spezielle Werthsystem. Damit ist dann der Satz I in der That bewiesen und zwar in dem Sinne, dass wenn die Funktionen $x_1\ x_2\ x_3$ nicht die in I angenommene Beschaffenheit haben, eine Gleichung bestehen muss für das Coefficientensystem (a b c), die entweder eine der Gleichungen 1 ist, oder die von der Form ist $F(z, a, b, c) = 0$, wo z ein positiver echter Bruch oder eine negative rationale Zahl ist.

Dass man übrigens die Existenz von unendlich vielen Funktionen mit Grenzstellen im Endlichen behaupten kann, welche Differentialgleichungssystemen der betrachteten Form genügen, ist leicht zu erkennen. Setzen wir die Coefficienten bis auf a_1, b_2, c_3 gleich Null, so liefern die mit gewissen Constanten multiplicirten Quotienten der σ Funktionen mit gleichem Nenner das Integral unserer Differentialgleichungen. Es seien die Werthe von a_1, b_2, c_3 für einen solchen Fall bezeichnet mit a_1^0, b_2^0, c_3^0 und ferner mögen x_1', x_2', x_3' die Werthe sein, welche die genannten Funktionen für einen Werth t' annehmen. Jetzt denken wir uns für die sämmtlichen Coefficienten a, b, c positive Werthe angenommen, welche keiner der soeben entwickelten Bedingungsgleichungen genügen, dabei soll $|a_1| > a_1^0$, $|b_2| > b_2^0$, $|c_3| > c_3^0$ sein. Setzen wir nun fest, dass die dem Differentialgleichungssystem genügenden Funktionen x_1, x_2, x_3 für $t = t'$ drei positive Werthe annehmen sollen ξ_1, ξ_2, ξ_3, von denen indessen $\xi_1 > |x_1'|$, $\xi_2 > |x_2'|$, $\xi_3 > |x_3'|$, so lässt sich behaupten, dass der Convergenzbezirk der Reihen, welche sich für die Funktionen x_1, x_2, x_3 in der Nähe von t' aus den Differentialgleichungen ergeben, nicht weiter sich erstreckt, als der für die Funktionen x_1, x_2, x_3 in dem speciellen Fall, dass die Coefficienten ausser a_1, b_2, c_3 verschwinden. Es folgt dies aus dem Umstande, dass die Coefficienten in den gedachten Reihenentwickelungen rationale ganze Funktionen sind der Coefficienten des Differentialgleichungssystems und der Werthe, welche die Funktionen für $t = t'$ annehmen. Die Entwickelungen aber der Funktionen x_1, x_2, x_3 für den erwähnten Spezialfall haben einen beschränkten Convergenzbezirk (es sind ja die Entwickelungen der σ Quotienten), die Funktionen x_1, x_2, x_3 für den allgemeinen Fall, dass die sämmtlichen Coefficienten positiv sind, haben daher Grenzstellen im Endlichen. Die Anzahl dieser Funktionensysteme x_1, x_2, x_3 ist unendlich, dann ξ_1, ξ_2, ξ_3 werden alle möglichen Werthcombinationen annehmen können, da x_1', x_2', x_3' im Allgemeinen willkürlich sind. Die Existenz solcher

Funktionen mit Grenzstellen im Endlichen lässt sich auch dann noch nachweisen, wenn die Coefficienten a, b, c aus positiven Coefficienten durch Multiplication mit derselben Grösse hervorgehen und es lässt sich vermuthen, dass das Integral solche Grenzstellen im Endlichen immer enthalten wird, wenn das Coefficientensystem (a, b, c) keine der Gleichungen 1 befriedigt, oder keine der Gleichungen F (z, a, b, c) = 0, wo z ein negativer echter Bruch oder eine positive rationale Zahl ist.

Für den Fall, dass die Funktionen, x_1 x_2 x_3 eindeutig sind, muss $r = 1$ werden und man erhält das Resultat:

> Soll das vorgelegte Differentialgleichungssystem sich intregiren lassen durch ein System eindeutiger Funktionen mit nur einer Grenzstelle im Unendlichen, welche nicht die Gestalt dreier beständig convergenter Reihen haben, so muss entweder eine der Gleichungen 1, oder eine der Gleichungen F (— k, a, b, c) = 0 bestehen, wo k eine positive ganze Zahl ist.

Wir bemerken, dass für den Fall, dass sämmtliche Coefficienten ausser a_1, b_2, c_3 verschwinden, für welchen Fall also eine Integration durch die drei Funktionen $k_1 \frac{\sigma_1 (t)}{\sigma (t)}$, $k_2 \frac{\sigma_2 (t)}{\sigma (t)}$, $k_3 \frac{\sigma_3 (t)}{\sigma (t)}$ (wo k_1, k_2, k_3 gewisse Constante sind), möglich ist, in der That die Gleichung besteht, F (— 1, a. b, c) = 0. Wir beweisen jetzt den Satz:

> IV. . . . Soll das betrachtete Differentialgleichungssystem durch 3 doppelt periodische Funktionen integrirbar sein, so müssen die Coefficienten a, b, c einer der Gleichungen 1 oder einer der Gleichungen F (— k, a, b, c) = 0, k = 1, 2, 3 . . r — 1 genügen, wo r die kleinste Anzahl von Unendlichkeitsstellen ist, die sich in den verschiedenen, allen 3 Funktionen gemeinsamen Periodenparallelogrammen befinden.

Zum Beweise schliessen wir sogleich den Fall aus, dass das Coefficientensystem a, b, c einer der Gleichungen 1 genügt, dann lässt sich zufolge von Satz II das System der Funktionen x_1, x_2, x_3 in der Nähe einer Unendlichkeitsstelle t′ folgendermassen entwickeln:

9 $$\begin{cases} x_1 = A_1 (t-t')^{-1} + A_2 + A_3 (t-t') + \dots \\ x_2 = B_1 (t-t')^{-1} + B_2 + B_3 (t-t') + \dots \\ x_3 = C_1 (t-t')^{-1} + C_2 + C_3 (t-t') + \dots \end{cases}$$

wobei A_1, B_1, C_1 von Null verschieden sind. Sollte nun einer der Werthe A_2, B_2, C_2 von Null verschieden sein, so müsste die Gleichung bestehen F (0, a, b, c) = 0, was aber nach einer früheren Bemerkung unmöglich ist, wenn keine der Gleichungen 1 besteht. Wir werden also $A_2 = B_2 = C_2 = 0$ voraussetzen müssen.

Nachdem wir uns hiervon überzeugt haben, wollen wir folgenden Hilfssatz von einem unserem Differentialgleichungssystem 1 genügenden System doppelt periodischer Funktionen beweisen:

Nehmen wir an, dass von den Coefficienten der in 9 aufgestellten Reihenentwickelungen ausser A_2, B_2, C_2 auch die folgenden Coefficientensysteme gleich Null seien bis zu A_{s+1} B_{s+1} C_{s+1} (incl.), nehmen wir ferner an, dass sich beweisen lasse, es bestehe für die s^te^ Ableitung des Logarithmus von x_1 die Gleichung

$$\frac{d^s \lg x_1}{dt^s} = F_1 (t) + a_1 c_1^{s-1} \frac{x_2^s x_3}{x_1} + F_2 (t) \; \dots\dots\dots \; 10,$$

wobei F_1 (t), F_2 (t) zwei doppelt periodische Funktionen von t bedeuten mit einem allen drei Funktionen x_1, x_2, x_3 zukommenden Periodenpaar 2ω, $2\omega'$, von welchen F_1 (t) nur unendlich werden kann

an den Nullstellen, F_2 (t) an den Unendlichkeitsstellen von x_1, dann lässt sich hieraus beweisen, dass für die s + 1^te Ableitung von $\lg_1 x_1$ die Gleichung bestehen wird:

$$\frac{d^{s+1} \lg x_1}{dt^{s+1}} = \bar{F}_1(t) + a_1 c_1^s \frac{x_2^{s+1} x_3}{x_1} + \bar{F}_2(t)$$

wo $\bar{F}_1$ $\bar{F}_2$ Funktionen derselben Art wie bezüglich F_1, F_2 sind, und dass, wenn β_1 $\beta_2 \ldots \beta_r$ die Werthe sind, welche x_2 annimmt für die nach den Perioden 2ω, $2\omega'$ untereinander incongruenten Nullstellen von x_1, als dann $\beta_1^s + \beta_2^s + \ldots + \beta_r^s = 0$ ist. c_1 wird dabei von Null verschieden angenommen.

In diesem Satze wird ein den Funktionen x_1 x_2 x_3 gemeinsames Periodensystem erwähnt, es wird also vorausgesetzt, dass die Funktionen x_1 x_2 x_3 gemeinsame Periodensysteme haben. Dieses ist nun in der That der Fall, wie wir jetzt zeigen wollen. Es folgt dies daraus, dass diese drei Funktionen in den Unendlichkeitsstellen übereinstimmen müssen. Nehmen wir an $2\omega_1$, $2\omega_1'$ sei ein Periodenpaar von x_1, $2\omega_2$, $2\omega_2'$ von x_2, $2\omega_3$, $2\omega_3'$ von x_3. Dann möge t_1', $t'' \ldots t^{(k)}$ ein vollständiges System von untereinder incongruenten Unendlichkeitsstellen der Funktion x_1 sein, welches also so beschaffen ist, dass jede andere Unendlichkeitsstelle von x_1 congruent ist mit einer dieser Stellen nach dem Periodenpaar $2\omega_1$ $2\omega_1'$. $t' + 2\omega_2$ ist nun eine Unendlichkeitsstelle für x_2, somit auch für x_1, und daher congruent mit einer der Stellen t' $t'' \ldots t^{(k)}$. Gleiches gilt von $t' + 4\omega_2$, $t' + 6\omega_2$, ... Die Anzahl der Stellen $t' + 2\,m\omega_2$, die man erhält, wenn man für m alle positiven ganzen Zahlen einsetzt, ist unendlich gross, mithin müssen sich unter diesen sicherlich einmal zwei Stellen finden, welche derselben Stelle des Systems $t' \ldots t^{(k)}$ congruent sind (mod $2\omega_1$, $2\omega_1'$.) Diese sind dann untereinander congruent, so dass man hat:

$$t' + 2\,m\,\omega_2 \equiv t' + 2\,m'\,\omega_2 \;(\text{mod } 2\,\omega_1\;\, 2\,\omega_1')$$
$$2\,(m - m^1)\,\omega_2 \equiv 0 \;(\text{mod } 2\,\omega_1\;\, 2\,\omega_1').$$

D. h. $2\,(m - m^1)\,\omega_2$ ist eine Periode von x_1. Es giebt also unter den Vielfachen von $2\,\omega_2$ stets eine Grösse, welche Periode ist von x_1. Genau so lässt sich zeigen, dass auch unter den Vielfachen von $2\,\omega_2'$ es stets eine Stelle giebt, welche Periode von x_1 ist. Diese beiden Perioden liegen sicher nicht in einer geraden Linie, denn ihr Quotient ist keine reelle Grösse. Daraus ist zu erkennen, dass man stets Periodensysteme finden kann, welche x_1 und x_2 gemeinschaftlich sind, und daraus lässt sich dann weiter auf ganz gleiche Weise folgern, dass es auch solche giebt, welche allen drei Funktionen x_1 x_2 x_3 gemeinschaftlich sind Ein solches allen drei Funktionen gemeinsames Periodensystem denken wir uns nun in dem zu beweisenden Satze zu Grunde gelegt und in Beziehung auf dieses denken wir uns ein vollständiges System von unter einander incongruenten Werthen bestimmt, für welche die drei Funktionen unendlich werden. Dieses System sei t', $t'' \ldots t^{(r)}$. Die Zahl r wollen wir dabei möglichst klein voraussetzen, d. h. wir wählen unter den verschiedenen, allen drei Funktionen gemeinsamen Periodenparallelogrammen dasjenige aus, welches die kleinste Anzahl von Unendlichkeitsstellen enthält. Nun ist die Anzahl der unter einander incongruenten Stellen, für welche eine der drei Funktionen gleich Null wird, wiederum gleich r, vorausgesetzt, dass man jede solche Stelle so oft mal zählt, als die Ordnungszahl angiebt, wit welcher die Funktion an der betreffenden Stelle gleich Null wird. Diese Ordnungszahl nun ist gleich 1. Hiervon überzeugt man sich leicht auf folgende Weise. Zunächst ist klar, dass für einen und denselben Werth keine zwei der drei Funktionen x_1 x_2 x_3 gleich Null werden dürfen. Wäre dies nämlich der Fall, so erhielte man für einen solchen Werth

$$\frac{d\,x_1}{d\,t} = 0, \quad \frac{d\,x_2}{d\,t} = 0, \quad \frac{d\,x_3}{d\,t} = 0$$

und da man nun, wie aus der Gestalt des Differentialgleichungssystems hervorgeht, jede höhere Ableitung in der Form darstellen kann:

$$R_1 (x_1\ x_2\ x_3) \frac{d x_1}{dt} + R_2 (x_1\ x_2\ x_2) \frac{d x_2}{dt} + R_3 (x_1\ x_2\ x_3) \frac{d x_3}{dt},$$

wo R_1 R_2 R_3 rationale ganze Funktionen bedeuten, so würde folgen, dass für einen solchen Werth die sämmtlichen höheren Ableitungen für alle drei Funktionen Constante wären. Diese Lösung ist allerdings stets möglich, sie kommt indessen hier nicht in Betracht. Wir werden also anzunehmen haben, dass es keine Stelle giebt, an welcher zwei der drei Funktionen gleichzeitig Null werden. Daraus folgt dann weiter, dass das Null werden mit keiner höheren Ordnungszahl als 1) eintreten kann. Denn sei etwa x_1 für $t = t_1$ gleich Null. Dann hat man, wenn β_1 ν_1 die Werthe sind, welche x_2, x_3 für $t = t_1$ annehmen, nach dem Differentialgleichungssystem für die Ableitung von x_1 die diesem Werthe entspricht. Die Gleichung

$$\left[\frac{d x_1}{d t}\right]_{t = t_1} = a_1\ \beta_1\ \nu_1,$$

somit ist, da β_1 ν_1 und ebenso auch a_1 von Null verschieden ist, die Ableitung von x_1 für den Werth $t = t_1$ von Null verschieden und x_1 wird daher an der Stelle t_1 mit der Ordnungszahl 1) gleich Null. (Ebenso folgert man, dass auch keine der andern Funktion mit einer höheren Ordnungszahl als 1 Null wird.) Wir bezeichnen nun ein solches System von unter einander incongruenten Nullstellen von x_1 mit t_1, t_2 . . t_r und wir setzen dabei voraus, dass diese Stellen so gewählt seien, dass $t_1 + t_2 + \ldots t_r = t' + t'' + \ldots t^{(r)}$ ist, was, wie in der Theorie der ellipt. Funktionen bewiesen wird, stets möglich ist. Die in dem Satze erwähnten Grössen β_1 β_2 . . $\beta_{(r)}$ sind dann die t_1 t_2 . . $t_{(r)}$ entsprechenden Werthe von x_2. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir jetzt zum eigentlichen Beweise des Satzes über.

Hierzu differenziren wir die Gleichung 10. Dann erscheint auf der rechten Seite das Glied

$$a_1\ c_1^{s-1} \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s\ x_3}{x_1}\right)$$

das wir weiter zu behandeln haben. Man hat zunächst:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s\ x_3}{x_1}\right) = x_3 \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s}{x_1}\right) + \frac{x_2^s}{x_1} \frac{d x_3}{dt}.$$

Hier entwickeln wir nun $x_3 \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s}{x_1}\right)$ in der Nähe einer Unendlichkeitsstelle, etwa t'. Es ist zufolge der Annahme über die Coefficientensysteme in den Funktionen x_1 x_2 x_3:

$$x_2^s = (t - t')^{-s} \left\{ B_1^s + K (t - t')^{s+1} + \ldots \right\}$$

$$\frac{x_2^s}{x_1} = \frac{B_1^s}{A_1 (t-t')^{s-1}} + K_1 (t-t')^2 + \ldots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{x_2^s}{x_1} = -(s-1) \frac{B_1^s}{A_1 (t-t')^s} + (t-t')\, \mathfrak{P} (t-t')$$

(wo $\mathfrak{P} (t-t')$ eine gewöhnlich Potenzreihe bedeutet, in welcher die Exponenten der einzelnen Glieder positiv sind).

$$x_3 \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s}{dt}\right) = \frac{-(s-1)\ B_1^s\ C_1}{A_1\ (t-t')^{s+1}} + \mathfrak{P}_1 (t-t').$$

Diese Entwickelung lässt nun erkennen, dass wir aus der Funktion $x_3 \frac{d}{dt} \left(\frac{x_2^s}{x_1}\right)$ die Unendlichkeitsstellen wegschaffen können durch Addition einer ebenfalls periodischen Funktion. Bildet man nämlich

die zu 2ω, $2\omega'$ gehörende p Funktion und bezeichnet man ferner mit $A_1^{(k)}$ $B_1^{(k)}$ $C_1^{(k)}$ das der Stelle $t^{(k)}$ entsprechende System von Grössen A_1 B_1 C_1, so ist

$$f(t) = (-1)^{s-1}(s-1)\sum_{k=1}^{r}\frac{B_1^{(k)}\,{}^s C_1^{(k)}}{s!\,A_1^{(k)}}\,p^{(s-1)}(t-t^{(k)})$$

eine Funktion, welche an der Stelle $t^{(k)}$ und an einer mit dieser Stelle congruenten Stelle entwickelt nur eine Minuspotenz enthält, nämlich $(s-1)\,\frac{B_1^{(k)\,s}\,C_1^{(k)}}{A_1^{(k)}}\,(t-t')^{-s-1}$ und es wird also

$$x_3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2^{\,s}}{x_1}\right) + f(t) = f_1(t)$$

eine Funktion sein, welche nur noch an den Nullstellen von x_1 unendlich werden kann.

Wir gehen jetzt über zur Betrachtung des Gliedes $\frac{x_2^s}{x_1}\,\frac{dx_3}{dt}$.

Nun hat man

$$\frac{dx_3}{dt} = c_1\,x_2\,x_3 + c_2\,x_3\,x_1 + c_3\,x^1\,x_2;$$

folglich:

$$\frac{x_2^s}{x_1}\,\frac{dx_3}{dt} = c_1\,\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1} + (c_2\,x_3 + c_3\,x_2)\,x_2^s,$$

oder wenn $\varphi(t) = (c_2\,x_3 + c_3\,x_2)\,x_2^s$ gesetzt wird:

$$\frac{x_2^s}{x_1}\,\frac{dx_3}{dt} = c_1\,\frac{x_2^{s+1}\,x^3}{x_1} + \varphi(t),$$

wo nun $\varphi(t)$ eine periodische Funktion von t mit dem Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ bedeutet, welche nur an den Unendlichkeitsstellen von x_1 unendlich gross werden kann.

Stellt man diesen Ausdruck mit dem für $x_3\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2^s}{x_1}\right)$ erhaltenen zusammen, so sieht man, dass sich ergiebt:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{x_2^s\,x_3}{x_1} = f_1(t) + c_1\,\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1} + \varphi(t) - f(t)$$

und dieses setzen wir nun in die durch Differentiation von 10 erhaltene Gleichung ein. Dann findet sich:

$$\frac{d^{s+1}\lg x_1}{dt^{s+1}} = F_1'(t) + a_1\,c_1^{s-1}\,f_1(t) + a_1\,c_1^s\,\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1} + a_1\,c_1^{s-1}\,\big(\varphi(t) - f(t)\big) + F_2'(t).$$

Hier sind nun $F_1'(t) + a_1\,c_1^{s-1}\,f_1(t) = \overline{F}_1(t)$ und $a_1\,c_1^{s-1}\,\big(\varphi(t) - f(t)\big) + F_2'(t) = \overline{F}_2(t)$ zwei Funktionen, welche $2\omega'$ $2\omega'$ als Periodenpaar haben und von welchen die erste nur an den Nullstellen, die zweite nur an den Unendlichkeitsstellen von x_1 unendlich werden kann; die Gleichung

11 $$\frac{d^{s+1}\lg x_1}{dt^{s+1}} = \overline{F}_1(t) + a_1\,c_1^s\,\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1} + \overline{F}_2(t),$$

welche sich hiernach ergiebt, enthält somit den ersten Theil des zu beweisenden Satzes.

Wir zerlegen jetzt die rechte Seite der letzten Gleichung in eine Summe zweier Funktionen, von welchen die eine unendlich wird nur an den Nullstellen, die andere nur an den Unendlichkeitsstellen von x_1. Hierzu ist offenbar nur erforderlich, die Trennung auszuführen von der Funktion $\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1}$, und wir entwickeln diese Funktion deshalb in der Nähe einer der Nullstellen von x_1, etwa t_1.

Beachtet man hierbei, dass die Werthe von x_2, x_3 für eine der Nullstellen von x_1 stets von Null verschieden sind, so findet man leicht, dass die gedachte Entwickelung sich in der Form darstellt:

$$\frac{x_2^{s+1}\,x_3}{x_1} = \frac{\beta_1^s}{a_1\,(t-t_1)} + \mathfrak{P}(t-t_1).$$

Zu dieser Funktion haben wir nun eine solche Funktion zu addiren, dass die Summe nicht mehr an den Stellen $t_1 \ldots t_r$ unendlich wird. Hierzu denken wir uns die σ Funktion gebildet, welche an der Stelle $t = 0$ und den mit dieser Stelle nach dem Periodenpaar 2ω, $2\omega^1$ congruenten verschwindet, und welche in der Theorie der elliptischen Funktionen gegeben wird in der Gestalt:

$$\sigma(t) = t \underset{w}{\pi} \left(1 - \frac{t}{w}\right) e^{\frac{1}{2}\frac{t^2}{w^2} + \frac{t}{w}},$$

dabei ist $w = 2\nu\,\omega + 2\nu'$, ω' und das Produkt erstreckt sich über alle ganzzahligen positiven und negativen ν und ν'. Dann erreichen wir offenbar unsern Zweck, wenn wir die Funktion bilden

$$\Psi(t) = \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s \frac{\sigma'(t-t_k)}{\sigma(t-t_k)},$$

denn entwickeln wir diese Funktion in der Nähe einer Stelle t_k oder einer mit dieser congruenten, so wird das die Minuspotenz enthaltende Glied $\frac{\beta_k^s}{t-t_k}$ und es wird daher

$$\Psi_1(t) = \frac{x_2{}^{s+1}x_3}{x_1} - \frac{1}{a_1}\Psi(t)$$

nicht mehr an den Stellen $t_1 \ldots t_k$ und den mit diesen congruenten unendlich, folglich ist durch die Gleichung

$$\frac{x_2{}^{s+1}x_3}{x_1} = \Psi_1(t) + \frac{1}{a_1}\Psi(t)$$

die Funktion $\frac{x_2{}^{s+1}x_3''}{x_1}$ in eine Summe zweier Funktionen zerlegt, von welchen $\Psi_1(t)$ nur an den Unendlichkeitsstellen, $\frac{1}{a_1}\psi(t)$ nur an den Nullstellen von x_1 unendlich werden kann.

Benutzt man dieses in der Gleichung 11, so erhält man:

$$\frac{d^{s+1}\lg x_1}{dt^{s+1}} = \left[\overline{F}_1(t) + c_1^s\,\Psi(t)\right] + \left[\overline{F}_2(t) + a_1\,c_1^s\,\Psi_1(t)\right]$$

und hier sind $\overline{F}_1(t) + c_1^s\,\Psi(t)$ und $\overline{F}_2(t) + a_1\,c_1^s\,\Psi_1(t)$ zwei Funktionen, von welchen die erste nur noch an den Nullstellen, die zweite an den Unendlichkeitsstellen von x_1 unendlich gross werden kann.

Die Funktion x_1 war nun eine eindeutige Funktion mit nur einer Grenzstelle im Unendlichen. Wenn es gelingt, irgend eine Ableitung des Logarithmus einer solchen Funktion, also hier die $s+1^{te}$ zu zerlegen in eine Differenz zweier eindeutigen Funktionen, etwa $G(t) - H(t)$, von welchen die eine $G(t)$ nur unendlich wird an den Nullstellen, die andere $H(t)$ an den Unendlichkeitsstellen der betreffenden Funktion, so kann man stets schliessen, dass die Differentialgleichungen

$$\frac{d^{s+1}\lg u_1}{dt^{s+1}} = G(t), \quad \frac{d^{s+1}\lg u_2}{dt^{s+1}} = H(t)$$

sich durch zwei beständig convergente Reihen von t befriedigen lassen, von welchen die erste u_1 Null wird an den Nullstellen, die zweite, u_2, an den Unendlichkeitsstellen der in Rede stehenden eindeutigen Funktion, und zwar sind die Ordnungszahlen, mit denen u_1, u_2 an den einzelnen Stellen Null werden, dieselben wie die, mit welchen die eindeutige Funktion Null bezüglich unendlich wird. Daraus geht hervor, dass wir werden schliessen können, dass die Gleichung:

12 $$\frac{d^{s+1}\lg P(t)}{dt^{s+1}} = \overline{F}_1(t) + c_1^s\,\Psi(t)$$

sich durch eine beständig convergente Reihe $P(t)$ werde integriren lassen, welche Null wird an den Nullstellen von x_1 und an diesen mit derselben Ordnungszahl wie x_1, also mit der Ordnungszahl 1.

Jetzt erinnern wir uns, dass die Funktion x_1 als doppelt periodische Funktion mit dem Periodenpaar 2ω, $2\omega'$ sich folgendermassen darstellen lässt:

$$x_1 = \frac{\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2)\ldots\sigma(t-t_r)}{\sigma(t-t')\,\sigma(t-t'')\ldots\sigma(t-t^{(r)})}\,C, \text{ wo } C \text{ eine Constante bedeutet.}$$

Zur Gültigkeit dieser Darstellung ist erforderlich, dass $t_1 + t_2 + - + t_r = t' + t'' + \ldots t^{(r)}$ sei, eine Bedingung, welche wir, wie bereits oben bemerkt ist, als erfüllt annehmen können. Wir bezeichnen den Zähler dieser Funktion mit z, setzen also:

$$z = C\,\sigma(t-t_1)\,\sigma(t-t_2) - \sigma(t-t_r).$$

Dann muss, da z und $P(t)$ an denselben Stellen mit der gleichen Ordnungszahl verschwinden, der Quotient $\frac{P(t)}{z}$ eine E Funktion sein, d. h. eine solche, die sich in der Gestalt $e^{P_1(t)}$ darstellen lässt, wo $P_1(t)$ best. convergent ist: Dann hat man also: $P(t) = z\,e^{P_1(t)}$. Nun ist aber

$$\frac{d^2 \lg z}{dt^2} = -\,p(t-t_1) - p(t-t_2) - \ldots - p(t-t_r)$$

eine doppelt periodische Funktion mit dem Periodenpaar 2ω, $2\omega'$, folglich auch $\frac{d^{s+1}\lg z}{dt^{s+1}}$, denn s wird hier $\geqq 1$ angenommen; setzt man daher $\frac{d^{s+1}\lg P(t)}{dt^{s+1}} = \frac{d^{s+1}\lg z}{dt^{s+1}} + \frac{d^{s+1}\,P_1(t)}{dt^{s+1}}$ in Gleichung 12 ein, so werden in der sich ergebenden Gleichung

$$\frac{d^{s+1}\,P_1(t)}{dt^{s+1}} + \frac{d^{s+1}\lg z}{dt^{s+1}} = \overline{F}_1(t) + c_1^s\,\Psi(t)$$

$\frac{d^{s+1}\,P_1(t)}{dt^{s+1}}$ und $c_1^s\,\Psi(t)$ die einzigen nicht periodischen Funktionen sein. Nun ist, wie die Definition von $\Psi(t)$ zeigt, $\Psi'(t)$ wieder eine doppelt periodische Funktion, so dass also $\frac{d^{s+2}\,P_1(t)}{dt^{s+2}}$ ebenfalls eine doppelt periodische Funktion werden muss, was nur dadurch möglich wird, dass dieser Ausdruck einer Constanten gleich wird, denn seiner Natur nach ist $\frac{d^{s+2}\,P_1(t)}{dt^{s+2}}$ eine beständig convergente Reihe, eine solche kann aber nur dann doppelt periodisch sein, wenn sie sich auf eine Constante reducirt. Man erhält somit:

$$\frac{d^{s+2}\,P_1(t)}{dt^{s+2}} = k,$$

$$\frac{d^{s+1}\,P_1(t)}{dt^{s+2}} = kt + k'.$$

Hiernach hat man
$$\frac{d^{s+1}\lg z}{dt^{s+1}} = \overline{F}_1(t) + c_1^s\,\Psi(t) - kt - k',$$

und dieses ist nun eine Gleichung, aus welcher sich mit Leichtigkeit folgern lässt, dass auch der zweite Theil des zu beweisenden Satzes seine Richtigkeit hat. Nach dieser Gleichung muss nämlich

$$c_1^s\,\psi(t) - kt$$

doppelt periodisch sein, da dies von den übrigen in dieser Gleichung vorkommenden Funktionen gilt. Setzt man nun

$$\eta = \frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega},\quad \eta' = \frac{\sigma'\omega'}{\sigma\omega},$$

so ändert sich bei einer Aenderung von t um 2ω $\psi(t)$ um $2\,\eta \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s$, bei einer Aenderung um $2\omega'$

ändert sich diese Funktion um $2\eta' \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s$. Bestimmt man danach die Aenderungen, welche $c_1^s \psi(t) - kt$ erleidet bei den genannten Aenderungen von t, so erhält man $2\eta c_1^s \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s - 2k\omega$, $2\eta' c_1^s \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s - 2k\omega'$; diese Grössen müssen daher Null sein oder es müssen die Gleichungen bestehen:

$$2\eta c_1^s \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s - 2k\omega = 0,$$

$$2\eta' c_1^s \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s - 2k\omega' = 0.$$

Diese Gleichung haben, da die Determinante $2\eta\omega' - 2\eta'\omega = \pi i$ von Null verschieden ist, die beiden andern zur Folge:

$$c_1^s \sum_{k=1}^{r} \beta_k^s = 0, \quad k = 0,$$

von welchen die erste den Beweis für den zweiten Theil unseres Satzes enthält, denn sie giebt, da c_1 von Null verschieden sein soll:

13 $$\sum_{k=1}^{r} \beta_k^s = 0.$$

Aus diesem Hilfssatze lässt sich nun der Satz IV unmittelbar folgern. Dividirt man die dritte Gleichung in dem von uns fortwährend betrachteten Differentialgleichungssystem durch x_1, so erhält man eine Gleichung, die die Form der Gleichung 10 hat, wenn man in derselben $s = 1$ setzt. Da nun auch das Coefficientensystem A_2, B_2, C_2, verschwindet, so folgt aus unserem Hilfssatz das Bestehen der Gleichung 10 für den Fall $s = 2$, sowie die Gleichung 13 für $s = 1$. Aus der Annahme $A_3 = B_3 = C_3 = 0$ folgt nun weiter das Bestehen der Gleichung 10 für $s = 3$, der Gleichung 13 für $s = 2$. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Schlussweise gelangt man zu dem Resultat, dass das Verschwinden der Coefficientensysteme $A_3\ B_3\ C_3$, $A_4\ B_4\ C_4 \ldots A_{r+1}$, B_{r+1}, C_{r+1} in 9 das Bestehen der Gleichung 13 für $s = 1, 2, \ldots r$ zur Folge haben würde. Diese Gleichungen können aber nicht anders bestehen, als wenn $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = 0$ ist, was indessen, wie wir gleich zu Anfang gezeigt haben, nicht der Fall ist. Die Annahme, es sollen die sämmtlichen Coefficientensysteme $A_3\ B_3\ C_3, \ldots A_r\ B_r\ C_r$ in 9 verschwinden, ist daher falsch, es muss somit wenigstens eines derselben von Null verschieden sein und dies verlangt, dass die Gleichung 6 bestehe für $r = 1$ und einen der Werthe $k = 2, 3, \ldots r$, oder es muss die Gleichung $F(-k, a, b, c) = 0$ für einen der Werthe $k = 1, 2 \ldots r - 1$ bestehen.

Es setzt dieser Beweis voraus, dass c_1 nicht Null sei. Ist aber nur einer der ausserhalb der Diagonale der Glieder $a_1\ b_2\ c_3$ stehenden Coefficienten von Null verschieden, so kann man durch Vertauschen der Funktionen x_1, x_2, x_3 ein neues System x'_1, x'_2, x'_3 herleiten, welches einem Differentialgleichungssystem derselben Form, wie das hier immer betrachtete genügt, in welchem die Coefficienten keiner der Gleichungen 1 genügen und in welchem der erste Coefficient in der dritten Gleichung jener von Null verschiedene Coefficient ist. Für den Fall endlich, dass alle Coefficienten ausser a_1, b_2, c_3 Null sind, besteht, wie wir bereits bemerkten, die Gleichung $F(-1, a, b, c) = 0$, wie man leicht durch Berechnung der Grössen A_1, B_1, C_1 finden wird. Der Satz IV gilt daher ganz allgemein.

Wir wenden uns jetzt in der folgenden Untersuchung zu elliptischen Funktionen bestimmten Grades und suchen hier die elliptischen Funktionen 2. und 4. Grades zu ermitteln, welche einem Differentialgleichungssystem der vorgelegten Form genügen. Ueber das Coefficientensystem (a, b, c) machen wir dabei immer die Voraussetzung, dass es keiner der Gleichungen 1 genügt.

Wir fragen uns also jetzt: Wie muss ein System dreier elliptischer Funktionen zweiten Grades beschaffen sein, damit es unseren Differentialgleichungen genügt? Setzen wir zunächst voraus die drei elliptischen Funktionen stimmen in ihren Periodensystemen überein, haben also gleiche Fundamentalperiodenpaare. Dann wird ein vollständiges System von unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen einer solchen Funktion aus zwei Stellen t', t'' bestehen, an deren jeder die Funktion mit der Ordnungszahl 1 unendlich wird. Diese beiden Stellen werden dann auch für jede der beiden anderen Funktionen zwei unter einander incongruente Unendlichkeitsstellen bilden. Entwickeln wir daher in der Nähe einer solchen Stelle, etwa t', und bezeichnen mit A'_1, B'_1, C'_1, die Coefficienten von $(t-t')$ in dieser Entwickelung und ebenso die entsprechenden Coefficienten in der Entwickelung in der Nähe von t'' mit A''_1, B''_1, C''_1, so hat man, wie in der Theorie der elliptischen Funktionen gezeigt wird

$$A'_1 + A''_1 = 0,\ B'_1 + B''_2 = 0,\ C'_1 + C''_1 = 0.$$

Diese Gleichungen führen uns nun unmittelbar zu einem Widerspruch. Das Grössensystem nämlich A'_1, B'_1, C'_1, ebenso wie A''_1, B''_1, C''_1, muss den Gleichungen 2) genügen, man hat also:

$$- A'_1 = a_1 B'_1 C'_1 + a_2 C'_1 A'_1 + a_3 A'_1 B'_1$$
$$- A''_1 = a_1 B''_1 C''_1 + a_2 C''_1 A''_1 + a_3 A''_1 B''_1$$

mithin müssten, da $A'_1 = - A''_1$, $B'_1 = - B''_1$, $C'_1 = - C''_1$ ist, die Gleichungen bestehen:

$$- A_1 = a_1 B'_1 C'_1 + a_2 C'_1 A'_1 + a_3 A'_1 B'_1$$
$$+ A'_1 = a_1 B'_1 C'_1 + a_2 C'_1 A'_1 + a_3 A'_1 B'_1$$

es müsste also
$$A'_1 = - A'_1$$
sein, was, da A'_1 von Null verschieden ist, nicht der Fall sein kann. Die Annahme, das betrachtete Differentialgleichungssystem werde durch drei elliptische Funktionen 2 Gr. befriedigt, die in ihren Periodensystemen übereinstimmen, führt daher zu einem Widerspruch, diese Annahme ist folglich falsch und wir erhalten den Satz:

> V . . . Drei elliptische Funktionen zweiten Grades, die in ihren Periodensystemen übereinstimmen, bilden niemals ein Integral des zu untersuchenden Differentialgleichungssystems, vorausgesetzt, dass die Coefficienten in demselben keiner der Gleichungen 1 genügen.

Nehmen wir jetzt an, dass die drei Funktionen x_1, x_2, x_3, deren jede wiederum vom zweiten Grade sein soll, nicht in ihren Periodensystemen übereinstimmen, dass also etwa x_1, x_2 verschiedene Fundamentalperiodenpaare haben. $2\omega_1$, $2\omega'_1$ bedeute alsdann ein Fundamentalperiodenpaar von x_1, $2\omega_2$, $2\omega'_2$ von x_2 und t', t'' mögen zwei unter einander incongruente Unendlichkeitsstellen von x_1 sein. Nun erkennt man zunächst, dass eine der Perioden von x_2 nicht Periode von x_1 sein kann. Wären nämlich beide Perioden $2\omega_2$, $2\omega'_2$ Perioden von x_1, so würden auch diese beiden ein Fundamentalperiodenpaar von x_1 bilden, denn t', t'' sind dann auch incongruent (mod $2\omega_1$, $2\omega'_2$), und ausserdem bilden auch in Beziehung auf dieses Periodenpaar $2\omega_2$, $2\omega'_2$ t', t'' ein vollständiges System von unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen von x_1, denn da t' t'' auch Unendlichkeitsstellen von x_2 sind, so ist jede Unendlichkeitsstelle der drei Funktionen congruent (mod $2\omega_2$, $2\omega'_2$) entweder mit t', oder mit t''. Ein Periodenpaar aber einer Funktion r Gr., in Beziehung auf welches ein vollständiges System unter einander incongruenter Unendlichkeitsstellen r Stellen enthält, ist nothwendig ein Fundamentalperiodenpaar, $2\omega_2$, $2\omega'_2$ würde daher auch ein Fundamentalperiodenpaar von x_1 sein und x_1, x_2 stimmten also in ihren Periodensystemen überein, was nicht der Fall sein soll. Wir werden daher annehmen, wenigstens eine der beiden Perioden $2\omega_2$, $2\omega'_2$ sei nicht Periode für x_1, also

etwa $2\omega_2$. Nun ist $t' + 2\omega_2$ als Unendlichkeitsstelle von x_2 auch eine solche von x_1, mithin ist $t' + 2\omega_2$ congruent entweder mit t' oder t'' (mod $2\omega_1$, $2\omega'_1$) und da diese Stelle nicht mit t' congruent ist (da sonst $2\omega_2$ Periode von x_1) so hat man

$$t' + 2\omega_2 \equiv t'' \ (\text{mod } 2_1\omega,\ 2\omega'_1).$$

Ebenso ist auch $t' + 4\omega_2$ congruent mit einer der Stellen t', t'' (mod $2\omega_1$, $2\omega'_1$) und da diese Stelle nicht $\equiv t''$ ist, weil sonst wieder $2\omega_2$ Periode von x_1 wäre, so folgt

$$t' + 4\omega_2 \equiv t' \ (\text{mod } 2\omega_1,\ 2\omega'_1),$$

oder es ist $4\omega_2$ Periode von x_1. Aus der ersten dieser beiden Congruenzen folgt:

$$t'' - t' \equiv 2\omega_2 \ (\text{mod } 2\omega_1,\ 2\omega'_1),$$

aus der zweiten:

$$4\omega_2 \equiv 0 \ (\text{mod } 2\omega_1,\ 2\omega'_1).$$

Die letzte dieser beiden Congruenzen sagt aus, $4\omega_2$ ist eine Periode von x_1, die erste lässt erkennen, dass die Differenz zweier unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen von x_1 eine halbe Periode beträgt. Soll also in zwei Funktionen 2 Gr., welche in ihren Unendlichkeitsstellen übereinstimmen, das Periodensystem der einen Funktion nicht mit dem der andern übereinstimmen, so muss für jede der beiden Funktionen die Differenz zweier unter einander incongruenter Unendlichkeitsstellen eine halbe Periode sein. Wir haben dies allerdings nur für eine der beiden Funktionen, x_1, gezeigt, es würde aber offenbar sich ebenso auch für die andere x_2 haben nachweisen lassen. Was nun die dritte Funktion x_3 anbetrifft, so gilt auch von ihr, dass die Differenz zweier unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen eine halbe Periode beträgt, denn fällt das Periodensystem dieser Funktion zusammen mit demjenigen einer der beiden Funktionen x_1, x_2, so ist dies unmittelbar evident, ist dies nicht der Fall, so kann man, genau wie es eben geschehen ist, nachweisen, dass die genannte Differenz eine halbe Periode von x_3 ist.

Es sei nun $F_1(t)$ eine doppeltperiodische Funktion 2 Gr. von t mit dem Periodenpaar $2\omega_1$, $2\omega'_1$, welche von der Beschaffenheit ist, dass die Differenz zweier incongruenten Unendlichkeitsstellen eine halbe Periode beträgt. t' sei eine Unendlichkeitsstelle. Dann ist sicherlich eine der Grössen: $t' + \omega_1$, $t' + \omega_1 + \omega'_1$, $t' + \omega'_1$ eine mit t' incongruente Unendlichkeitsstelle. Man wird stets annehmen können, dass $t' + \omega_1$ oder $t' + \omega'_1$ Unendlichkeitsstelle ist, denn im entgegengesetzten Falle könnte man ja als Fundamentalperioden $2\omega_1$, $2(\omega_1 + \omega'_1)$ wählen. Wir setzen daher jetzt voraus, dass das Fundamentalperiodenpaar so gewählt sei, dass $t' + \omega'_1$ Unendlichkeitsstelle ist. Dann wollen wir ω und ω' dadurch definiren, dass wir setzen

$$2\omega = 2\omega_1,\ 2\omega' = \omega'_1,$$

sodass also das Periodenpaar von F_1 ist 2ω, $4\omega'$ (und von diesem Periodenpaar können wir sogar voraussetzen, dass die reelle Coordinate in $\frac{\omega'}{\omega i}$ von pos. Zeichen ist, denn entgegengesetzten Falles brauchten wir ja nur als Fundamentalperiodenpaar zu wählen $-2\omega_1$, $2\omega'_1$). Nun möge $F_2(t)$ eine zweite doppelperiodische Funktion von t 2 Gr. sein, welche mit der ersten in den Unendlichkeitsstellen übereinstimmt, und für welche ebenfalls die Differenz zweier incongruenten Unendlichkeitsstellen eine halbe Periode ist. Auch hier können wir das Fundamentalperiodenpaar, welches hier mit 2ϱ, $4\varrho'$ bezeichnet werden möge, so wählen, dass $t' + 2\varrho'$ Unendlichkeitsstelle wird. Jetzt fassen wir den Punkt ins Auge $t' + 2\omega'$, welcher ein Unendlichkeitspunkt von F_1 und somit auch von F_2 ist. Diese Grösse ist nun congruent entweder mit t' oder mit $t' + 2\varrho'$ (mod $2\varrho_1$, $4\varrho'$). Dieses giebt uns zwei Fälle, welche wir gesondert betrachten wollen.

Es sei $t' + 2\omega' \equiv t' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$.

Dann ist $2\omega' \equiv 0 \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$,

oder $2\omega'$ ist eine Periode von F_2. Nun ist ferner auch $t' + 2\omega$ Unendlichkeitspunkt von F_1, folglich auch von F_2 und es kann nicht $t' + 2\omega \equiv t' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$ sein, weil dann 2ω, $2\omega'$ Periodenpaar von F_2 wäre, was nicht möglich ist, weil in diesem Falle die sämmtlichen Unendlichkeitsstellen von $F_2(t)$ congruent unter einander wären. Man gelangt daher zu dem Schlusse, dass

$$t' + 2\omega \equiv t' + 2\Omega' \pmod{2\omega, 4\Omega'}$$
$$2\omega \equiv 2\Omega', \; 4\omega \equiv 4\Omega' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$$

ist, d. h., dass 4ω eine Periode von F_2 ist. Die Annahme somit, dass $t' + 2\omega' \equiv t' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$ ist, führt zu dem Schluss, dass $2\omega'$, 4ω ein Periodenpaar ist von F_2, und man überzeugt sich leicht, dass es auch ein Fundamentalperiodenpaar von F_2 ist. Wir gehen jetzt zu der Betrachtung des zweiten Falles über, dass nämlich: $t' + 2\omega' \equiv t' + 2\Omega' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$.

Hieraus folgt: $4\omega' \equiv 4\Omega' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$,

d. h., $4\omega'$ ist eine Periode von F_2. Was $t' + 2\omega$ anbetrifft, so kann diese Grösse wieder entweder mit t' oder mit $t' + 2\Omega'$ congruent sein. Im ersten Falle erhält man 2ω als Periode von F_2, die Funktion F_2 hat also dann das Periodenpaar 2ω, $4\omega'$, welches wieder ein Fundamentalperiodenpaar sein muss, es stimmen also dann F_1, F_2 in ihren Periodensystemen überein. Nehmen wir daher jetzt an, dass $t' + 2\omega \equiv t' + 2\Omega'$,

so folgt, indem man hierzu addirt: $t' + 2\omega' \equiv t' + 2\Omega'$

$$2t' + 2(\omega + \omega') \equiv 2t' + 4\Omega' \pmod{2\Omega, 4\Omega'}$$
$$2(\omega + \omega') \equiv 4\Omega' \pmod{2\Omega, 4\Omega'},$$

d. h., $2(\omega + \omega')$ ist Periode von F_2, so dass in diesem Fall sich $4\omega'$, $2(\omega + \omega')$ als zwei Perioden von F_2 ergeben und auch diese Perioden werden dann Fundamentalperioden von F_2 sein. Man sieht also für die Funktion $F_2(t)$ ergeben sich drei mögliche Fälle: entweder sie stimmt mit $F_1(t)$ in den Perioden überein, oder sie hat zu Fundamentalperioden $2\omega'$, 4ω oder $2(\omega + \omega')$, $4\omega'$.

Nun können wir unter x_1 die Funktion $F_1(t)$ verstehen, jede der Funktionen x_2, x_3 stellt dann eine solche Funktion $F_2(t)$ dar. Die Funktionen x_1, x_2, x_3 sollten nicht alle drei in ihren Periodensystemen übereinstimmen, hierzu brauchen nicht je zwei in den Perioden verschieden von einander zu sein, nur muss es zwei in den Perioden nicht übereinstimmende unter ihnen geben; jetzt indessen nehmen wir zunächst an, dass je zwei der Funktionen x_1, x_2, x_3 in ihren Periodensystemen verschieden von einander sind. Dann werden hiernach diesen drei Funktionen die Fundamentalperiodenpaare zukommen 2ω, $4\omega'$; $2(\omega + \omega')$, $4\omega'$; $2\omega'$, 4ω, wo wir die Grössen ω, ω' dadurch bestimmen können, dass wir ein Fundamentalperiodenpaar 2ω, $4\omega'$ von x_1 aufsuchen, welches so beschaffen ist, dass, wenn t' ein Unendlichkeitspunkt von x_1 ist $t' + 2\omega'$ einen zweiten liefert. Bildet man nun die Funktion σt, welche den Grössen 2ω, $2\omega'$ entspricht, und ausserdem die Funktionen

$$\sigma_1(t) = \frac{\sigma(t+\omega)}{\sigma\omega} e^{-\eta\omega}, \quad \sigma_2(t) = \frac{\sigma(t+\omega+\omega')}{\sigma(\omega+\omega')} e^{-(\eta+\eta')\omega}, \quad \sigma_3(t) = \frac{\sigma(t+\omega')}{\sigma\omega'} e^{-\eta'\omega},$$

so sind die soeben genannten Periodenpaare diejenigen, welche den drei Funktionen $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(t)}$ zukommen, so dass wir zu dem Resultat gelangen:

Die den drei Funktionen $\frac{\sigma_1(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_2(t)}{\sigma(t)}, \frac{\sigma_3(t)}{\sigma(t)}$ zukommenden Periodenpaare sind diejenigen, welche drei elliptischen Funktionen zweiten Grades angehören, die in ihren Unendlichkeitsstellen übereinstimmen, von welchen aber je zwei in ihren Periodensystemen verschieden sind.

Eine elliptische Funktion 2. Gr. nun, welche mit einer Funktion $\frac{\sigma\lambda(t)}{\sigma(t)}$ übereinstimmt in den Periodensystemen, welche ferner an der Stelle t' und den mit dieser Stelle nach den Grössen 2ω, $2\omega'$ congruenten unendlich wird, kann man immer darstellen in der Form $C\lambda\frac{\sigma\lambda(t-t')}{\sigma(t-t')}+C\lambda'$. Daraus geht hervor, dass die Funktionen x_1, x_2, x_3, wenn wir annehmen, dass keine zwei in den Perioden übereinstimmen, die Funktionen $C_1\frac{\sigma_1(t-t)}{\sigma(t-t')}+C_1'$, $C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_1'$, $C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_1'$ in einer gewissen Reihenfolge sein werden.*)

Man überzeugt sich auch, dass die Grössen C_1', C_2', C_3' gleich Null sein müsste. Nehmen wir an, dieses wäre nicht der Fall. Nun können wir annehmen, es sei

$$x_1=C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_1',\quad x_2=C_2\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_2',\quad x_3=C_3\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_3'.$$

Sollten die Indices der Funktionen x_2, x_3 nicht mit denjenigen der rechts vorkommenden Funktionen $\frac{\sigma_2}{\sigma}$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ übereinstimmen, so könnten wir x_2, x_3 vertauschen und erhielten dadurch ein Funktionensystem, welches wieder einem Differentialgleichungssystem von der hier betrachteten Form genügte, und welches wir uns in der folgenden Betrachtung könnten zu Grunde gelegt denken. Bei dieser Annahme erhalten wir nun $\frac{dx_1}{dt}=C_1\frac{d}{dt}\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')}=-C_1\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}=-C_1\frac{(x_2-C_2')(x_3-C_3')}{C_2\ C_3}$ und es müsste also $-C_1\frac{(x_2-C_2')(x_3-C_3')}{C_2\ C_3}=a_1x_2x_3+a_2x_3x_1+a_3x_1x_2$ sein. Wir behaupten nun, dass diese Gleichung nur dann bestehen könne, wenn die Coefficienten der entsprechenden Glieder mit einander übereinstimmen, also diese Relation in Beziehung auf x_1, x_2, x_3 identisch besteht. Beachtet man dann, dass ausser dieser noch zwei analoge Gleichungen bestehen müssen, die sich aus der zweiten und dritten Gleichung unseres Differentialgleichungssystems ergeben, so folgt daraus unmittelbar, dass $C_1'=C_2'=C_3'=0$ sein muss. Würde nun die Gleichung zwischen x_2, x_3 nicht dadurch bestehen, dass die Coefficienten der entsprechenden Glieder übereinstimmten, so würde durch diese Gleichung eine der Funktionen x_1, x_2, x_3, etwa x_2 abhängig von x_1, x_3, und zwar würde diese Abhängigkeit eine eindeutige sein. Dies ist aber unmöglich zufolge der Zusammensetzung der drei Funktionen x_1, x_2, x_3 aus den σ Quocienten, wie man leicht dadurch beweist, dass man zeigt, es giebt stets unendlich viele Werthe von t, für welche zwei der drei Funktionen $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $\frac{\sigma_2}{\sigma}$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ dasselbe Werthsystem annehmen, wie für einen bestimmten Werthe t', während die dritte Funktion für dieselben einen von dem für t' angenommenen verschiedenen Werth erhält. Es lässt dies nun nicht nur erkennen, dass die Constanten C_1', C_2', C_3' Null sein müssen, sondern auch, dass dieses gilt von sämmtlichen Coefficienten in unserem Differentialgleichungssystem ausser a_1, b_2, c_3. Es zeigt uns also diese Untersuchung, dass die drei Funktionen x_1, x_2, x_3, von denen wir annehmen, dass keine zwei in ihren Perioden übereinstimmen, keine anderen sind, als die mit gewissen Constanten multiplicirten Quotienten der σ Funktionen.

---

*) Die Funktion x_1 können wir dabei stets in der Gestalt $C_1\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')}+C_1'$ uns dergestalt denken, vorausgesetzt, dass wir ω, ω' so bestimmen, wie soeben angegeben wurde.

Nun mögen zwei der drei Funktionen x_1, x_2, x_3 in ihren Perioden übereinstimmen. Dann können wir offenbar ein Funktionensystem durch Vertauschung der einzelnen Funktionen so herleiten, dass x_1, x_2 die beiden Funktionen sind, welche in ihren Perioden übereinstimmen, und so wollen wir uns das Funktionensystem x_1, x_2, x_3 bestimmt denken. Indem wir dann wieder ω, ω' so bestimmen, dass 2ω, $4\omega'$ ein Fundamentalperiodenpaar von x_1, und $t' + 2\omega'$ eine der Unendlichkeitsstellen von x_1 ist (wenn t' eine andere Unendlichkeitsstille bedeutet), bilden wir die Funktionen σ, σ_1, σ_2, σ_3 und haben alsdann:

$$x_1 = C_1 \frac{\sigma_1 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_1', \quad x_2 = C_2 \frac{\sigma_1 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_2'$$

während x_3 eine der beiden Funktionen sein muss

$$C_2 \frac{\sigma_2 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_2', \quad C_3 \frac{\sigma_3 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_3'.$$

Nehmen wir etwa an, es sei

$$x_3 = C_3 \frac{\sigma_3 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_3'.$$

Nun hängt $\frac{d x_1}{d t}$ nach der ersten Gleichung in dem von uns betrachteten Differentialgleichungssystem ab von x_1, x_2, x_3. Da diese Funktionen nur von $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ abhängen, so muss, wenn das Funktionensystem $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ dasselbe Werthsystem annimmt, auch $\frac{d x_1}{d t}$ denselben Werth wieder erhalten; hieraus folgt weiter, dass alsdann auch $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ stets denselben Werth wieder annehmen müsste, denn man hat auch

$$\frac{dx_1}{dt} = - C_1 \frac{\sigma_2 (t-t')}{\sigma (t-t')} \frac{\sigma_3 (t-t')}{\sigma (t-t')}.$$

Dieses ist aber, wie wir gesehen haben, nicht der Fall. Es bleibt nun nur übrig anzunehmen, dass $x_3 = C_2 \frac{\sigma_2 (t-t')}{\sigma (t-t')} + C_2'$ sei, was aber ebenfalls zu einem Widerspruch führt, denn es müsste danach, sobald $\frac{\sigma_1}{\sigma}$, $\frac{\sigma_2}{\sigma}$ dasselbe Werthsystem annimmt, auch $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ denselben Werth wieder erhalten, was ebenfalls nicht der Fall ist. Man sieht daher, es ist überhaupt unmöglich, dass zwei der drei Funktionen x_1, x_2, x_3 in ihren Periodensystemen übereinstimmen. Dies beweiset, zusammen mit der vorhergehenden Betrachtung und Satz V, die Richtigkeit des Satzes:

Drei elliptische Funktionen 2. Grades können dem von uns betrachteten Differentialgleichungssystem, in welchem die Coefficienten keiner der Gleichungen 1 genügen, nur dann genügen, wenn sie ein Funktionensystem bilden von der Form

$$C_\lambda \frac{\sigma_\lambda (t-t')}{\sigma (t-t')}, \quad C_\mu \frac{\sigma_\mu (t-t')}{\sigma (t-t')}, \quad C_\nu \frac{\sigma_\nu (t-t')}{\sigma (t-t')}$$

wo von den Indices λ, μ, ν keine zwei einander gleich sein dürfen.

Um nun zu einer Verallgemeinerung dieses Funktionensystems zu gelangen, fassen wir die Periodensysteme dieser Funktionen ins Auge.

Man überzeugt sich leicht, dass 4ω, $4\omega'$ sich als ein Fundamentalperiodenpaar für das diesen Funktionen gemeinsame Periodensystem auffassen lässt.

Fragen wir uns jetzt nach der Anzahl von Unendlichkeitsstellen, die in einem, in Beziehung auf das den drei Funktionen gemeinsame Periodensystem bestimmten, vollständigen System von unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen enthalten sind, so ergeben sich vier solcher Stellen, es sind dieses die Stellen t'_1 $t' + 2\omega$, $t' + 2\omega'$, $t' + 2(\omega + \omega')$. Als eine natürliche Verallgemeinerung eines solchen Systems von Funktionen nun erscheint es, drei elliptische Funktionen 4. Grades zu betrachten, welche in ihren Periodensystemen übereinstimmen. Wir fragen uns daher jetzt, können drei solche Funktionen einem Differentialgleichungssystem von der betrachteten Form oder einem ähnlichen genügen? Ueber die Coefficienten machen wir dabei wieder die Voraussetzung, dass sie keine der Gleichungen 1 befriedigen.

Wir bezeichnen mit 2ω, $2\omega'$ das allen drei Funktionen gemeinsame Periodenpaar und denken uns wieder die diesem zugehörende Funktion $\sigma(t)$ gebildet. Da die drei Funktionen an denselben Stellen und zwar mit der Ordnungszahl 1 unendlich werden müssen, so wird, wenn man die Stellen eines Systems von unter einander incongruenten Unendlichkeitsstellen bezeichnet mit t', t'', t''', t^{IV}, man die Funktionen x_1 x_2 x_3 darstellen können in der Form:

$$x_1 = K_1 + \sum_{\gamma=1}^{4} A_1^{(\gamma)} \frac{\sigma'(t - t^{(\gamma)})}{\sigma(t - t^{(\gamma)})}$$

$$x_2 = K_2 + \sum_{\gamma=1}^{4} B_1^{(\gamma)} \frac{\sigma'(t - t^{(\gamma)})}{\sigma(t - t^{(\gamma)})}$$

$$x_3 = K_3 + \sum_{\gamma=1}^{4} C_1^{(\gamma)} \frac{\sigma'(t - t^{(\gamma)})}{\sigma(t - t^{(\gamma)})}$$

wobei zwischen $A_1^{(\gamma)}$, $B_1^{(\gamma)}$, $C_1^{(\gamma)}$ die Relationen bestehen müssen

14 $$\sum_{\gamma=1}^{4} A_1^{(\gamma)} = 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{0} B_1^{(\gamma)} = 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{4} C_1^{(\gamma)} = 0,$$

während gleichzeitig $A_1^{(\gamma)}$, $B_1^{(\gamma)}$, $C_1^{(\gamma)}$ eines der vier von den Coefficienten a, b, c abhängigen, den Gleichungen 3 genügenden Werthsysteme sein muss. K_1, K_2, K_3 bedeuten irgend welche, vorläufig noch unbekannte Constante. Nun haben wir gesehen, dass das Coefficientensystem A_2 B_2 C_2, die constanten Glieder in den Entwickelungen 9 in der Nähe irgend einer Unendlichkeitstselle, bei der von uns über das Coefficientensystem a, b, c gemachten Voraussetzung stets verschwinden muss. Dieses giebt dann gewisse Gleichungen, welche uns zur Bestimmung von t'', t''', t^{IV}, sowie der Constanten K führen werden, während t' willkührlich bleibt. Beachtet man nun, dass das constante Glied von $\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}$ in der Entwickelung nach Potenzen von t verschwindet, so sieht man, dass die Gleichungen, welche daraus hervorgehen, dass man die constanten Glieder in den Entwickelungen von x_1 gleich Null setzt, die folgenden sind:

15 $$\left\{\begin{aligned}
&K_1 + A_1'' \frac{\sigma'(t' - t'')}{\sigma(t' - t'')} + A_1''' \frac{\sigma'(t' - t''')}{\sigma(t' - t''')} + A_1^{IV} \frac{\sigma'(t' - t^{IV})}{\sigma(t' - t^{IV})} = 0\\
&K_1 + A_1' \frac{\sigma'(t'' - t')}{\sigma(t'' - t')} + A_1''' \frac{\sigma'(t'' - t''')}{\sigma(t'' - t''')} + A_1^{IV} \frac{\sigma'(t'' - t^{IV})}{\sigma(t'' - t^{IV})} = 0\\
&K_1 + A_1' \frac{\sigma'(t''' - t')}{\sigma(t''' - t')} + A_1'' \frac{\sigma'(t''' - t'')}{\sigma(t''' - t'')} + A^{IV} \frac{\sigma'(t''' - t^{IV})}{\sigma(t''' - t^{IV})} = 0\\
&K_1 + A_1' \frac{\sigma'(t^{IV} - t')}{\sigma(t^{IV} - t')} + A_1'' \frac{\sigma'(t^{IV} - t'')}{\sigma(t^{IV} - t'')} + A_1''' \frac{\sigma'(t^{IV} - t''')}{\sigma(t^{IV} - t''')} = 0
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen gehen dann die entsprechenden, welche sich aus den Entwickelungen für x_2, x_3 ergeben, dadurch hervor, dass man die Grössen A durch B C ersetzt und für K_1 einführt K_2, K_3.

In dem Gleichungssystem 15 ziehen wir jetzt die zweite Gleichung von der ersten, die dritte von der zweiten und die vierte von der dritten ab. Dann ergeben sich drei Gleichungen, deren erste ist:

$$(A''_1 + A'_1)\frac{\sigma'(t'-t'')}{\sigma(t'-t'')} + A'''_1\left\{\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t'')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\} + A^{IV}_1\left\{\frac{\sigma'(t'-t^{IV})}{\sigma(t'-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t'')}{\sigma(t^{IV}-t'')}\right\} = 0$$

Benutzt man hier, dass $A'_1 + A''_1 = - A'''_1 - A^{IV}_1$, so geht diese Gleichung über in:

$$16\left\{\begin{array}{l} A'''_1\left\{\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t'')} \mp \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}\right\} + A^{IV}_1\left\{\frac{\sigma'(t'-t^{IV})}{\sigma(t'-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t'')}{\sigma(t^{IV}-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')}\right\} = 0 \\ \text{Ganz ähnlich gestalten sich die beiden andern Gleichungen, sie werden:} \\ A'_1\left\{\frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\} + A^{IV}_1\left\{\frac{\sigma'(t''-t^{IV})}{\sigma(t''-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t''')}{\sigma(t^{IV}-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')}\right\} = 0 \\ A'_1\left\{\frac{\sigma'(t'''-t')}{\sigma(t'''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t^{IV})}{\sigma(t'-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t''')}{\sigma(t^{IV}-t''')}\right\} + A''_1\left\{\frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t^{IV})}{\sigma(t''-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t''')}{\sigma(t^{IV}-t''')}\right\} = 0 \end{array}\right.$$

Ausser diesen Gleichungen bestehen noch 6 andere Gleichungen, welche sich ergeben durch Vertauschung der Grössen A mit den Grössen B und C und welches diejenigen sind, die durch die entsprechenden Entwickelungen für x_2, x_3 sich ergeben. Stellt man nun diese 6 Gleichungen mit den Gleichungen 16 zusammen, und beachtet man, dass das Verschwinden eines der Coefficienten der Grössen A_1 in 16 das Verschwinden der übrigen zufolge hat, so sieht man, dass, wenn die Coefficienten der Grössen A nicht sämmtlich gleich Null werden, die folgenden Relationen bestehen müssen:

$$\frac{A'''_1}{A^{IV}_1} = \frac{B'''_1}{B^{IV}_1} = \frac{C'''_1}{C^{IV}_1}$$

$$\frac{A^{IV}_1}{A'_1} = \frac{B^{IV}_1}{B'_1} = \frac{C^{IV}_1}{C'_1}$$

$$\frac{A'_1}{A''_1} = \frac{B'_1}{B''_1} = \frac{C'_1}{C''_1}$$

während gleichzeitig jedes der Werthsysteme $A^{(k)}_1$ $B^{(k)}_1$ $C^{(k)}_1$ den Gleichungen 2 genügen muss. Sind nun $A^{(k)}_1$ $B^{(k)}_1$ $C^{(k)}$ und $A^{(s)}_1$ $B^{(s)}_1$ $C^{(s)}$ zwei den Gleichungen 2 genügende Werthsysteme, welche in der Beziehung zu einander stehen, dass:

$$A^{(s)}_1 = k\,A^{(k)}_1,\quad B^{(s)}_1 = k\,B^{(k)}_1,\quad C^{(s)}_1 = k\,C^{(k)}_1$$

ist, so erhält man die folgenden Gleichungen:

$$- A^{(k)}_1 = a_1\,B^{(k)}_1\,C^{(k)}_1 + a_2\,C^{(k)}_1\,A^{(k)}_1 + a_3\,A^{(k)}_1\,B^{(k)}_1$$

$$- A^{(s)}_1 = k^2\left\{a_1\,B^{(k)}_1\,C^{(k)}_1 + a_2\,C^{(k)}_1\,A^{(k)}_1 + a_3\,A^{(k)}_1\,B^{(k)}_1\right\}.$$

Es muss also $A^{(s)}_1 = k^2\,A^{(k)}_1$

und gleichzeitig $A^{(s)}_1 = k\,A^{(k)}_1$

sein, mithin k = 1 sein, sodass also die Werthsysteme $A^{(s)}_1$ $B^{(s)}_1$ $C^{(s)}_1$, $A^{(k)}_1$ $B^{(k)}_1$ $C^{(k)}_1$ mit einander über-

einstimmen müssen. Dieses lässt erkennen, dass die soeben zwischen den Grössensystemen $A_1' \; B_1' \; C_1'$, $A_1'' \; B_1'' \; C_1''$, $A_1''' \; B_1''' \; C_1'''$, $A_1^{IV} \; B_1^{IV} \; C_1^{IV}$ abgeleiteten Relationen zur Folge haben werden:

$$A_1''' = A_1^{IV} = A_1' = A_1''$$
$$B_1''' = B_1^{IV} = B_1' = B_1''$$
$$C_1''' = C_1^{IV} = C_1' = C_1'',$$

welche Relationen sich aber nicht vertragen mit den Relationen 14). Die Annahme daher, dass die Coefficienten der Grössen A in den Gleichungen 15) nicht sämmtlich verschwinden, führt zu einem Widerspruch, wir gelangen daher zu den vier Gleichungen:

$$\frac{\sigma'(t'-t''')}{\sigma(t'-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')} = 0$$
$$\frac{\sigma'(t''-t^{IV})}{\sigma(t''-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t''')}{\sigma(t^{IV}-t''')} + \frac{\sigma'(t'''-t'')}{\sigma(t'''-t'')} = 0$$
$$\frac{\sigma'(t'''-t')}{\sigma(t'''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t^{IV})}{\sigma(t'-t^{IV})} + \frac{\sigma'(t^{IV}-t''')}{\sigma(t^{IV}-t''')} = 0$$
$$\frac{\sigma'(t^{IV}-t'')}{\sigma(t^{IV}-t'')} + \frac{\sigma'(t''-t')}{\sigma(t''-t')} + \frac{\sigma'(t'-t^{IV})}{\sigma(t'-t^{IV})} = 0$$

Von diesen 3 Gleichungen ist jede eine Folge der drei andern Gleichungen, denn bildet man die Summe der mit alternirendem Vorzeichen versehenen linken Seiten, so verschwindet diese Summe identisch. Es wird daher genügen, drei dieser Gleichungen zu betrachten, und wir wählen hierzu die erste, dritte und vierte Gleichung, aus welchen wir nun t'', t''', t^{IV} bestimmen wollen. Setzen wir hierzu $t'' = t' + t_1$, $t''' = t' + t_2$, $t^{IV} = t' + t_3$, so sind die Gleichungen für t_1, t_2, t_3 die folgenden:

17
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\sigma'(t_2-t_1)}{\sigma(t_2-t_1)} &= \frac{\sigma'(t_2)}{\sigma(t_2)} - \frac{\sigma'(t_1)}{\sigma(t_1)} \\ \frac{\sigma'(t_3-t_1)}{\sigma(t_3-t_1)} &= \frac{\sigma'(t_3)}{\sigma(t_3)} - \frac{\sigma'(t_1)}{\sigma(t_1)} \\ \frac{\sigma'(t_3-t_2)}{\sigma(t_3-t_2)} &= \frac{\sigma'(t_3)}{\sigma(t_3)} - \frac{\sigma'(t_2)}{\sigma(t_3)} \end{aligned}\right.$$

Zufolge der Formel:

18
$$\frac{\sigma'(u-v)}{\sigma(u-v)} = \frac{\sigma' u}{\sigma v} - \frac{\sigma' v}{\sigma v} + \frac{1}{2}\,\frac{p' u + p' v}{p u - p v}$$

sind diese Gleichungen identisch mit

$$\frac{p' t_2 + p' t_1}{p t_2 - p t_1} = 0, \quad \frac{p' t_3 + p' t_1}{p t_3 - p t_1} = 0, \quad \frac{p' t_3 + p' t_2}{p t_3 - p t_2} = 0.$$

Hierzu müssen die Gleichungen erfüllt sein: $p' t_2 + p' t_1 = 0$, $p' t_3 + p' t_2 = 0$, $p' t_3 + p' t_1 = 0$. Zieht man hier die erste von der dritten Gleichung ab, so erhält man

$p' t_3 - p' t_2 = 0$, welche mit

$p' t_3 + p' t_2 = 0$ zusammen giebt:

$p' t_3 = 0$, $p' t_2 = 0$ und hieraus folgt auch $p' t_1 = 0$, so dass man erhält, es müssen die Grössen t_1, t_2, t_3 die halben Perioden ω, ω', $\omega + \omega'$ in irgend einer Reihenfolge sein. Wir setzen daher jetzt

$$t'' = t' + \omega, \; t''' = t' + \omega + \omega', \; t^{IV} = t' + \omega'$$

und wir bemerken dabei, dass es keinen Einfluss auf die Gültigkeit der nachfolgenden Resultate hat,

wenn wir die Grössen ω, $\omega + \omega'$, ω' in anderer Reihenfolge den Grössen t'', t''', t^{IV} zuordnen, wie sich dies auch sogleich zeigen wird. Wir denken uns nun die Constanten K_1, K_2, K_3 aus den Gleichungen 15 und den diesen entsprechenden Gleichungen bestimmt. Diese für K_1, K_2, K_3 sich ergebenden Ausdrücke, sowie die Ausdrücke für t'', t''', t^{IV} denken wir uns jetzt in den Ausdrücken für die Funktionen x_1, x_2, x_3 eingesetzt. Beachtet man dann die Relationen 14, sowie die Formel 18, so findet man leicht, dass sich die Ausdrücke für x_1, x_2, x_3 in der folgenden Form stellen:

19
$$\left\{\begin{aligned} x_1 &= \frac{p'(t-t')}{2}\left\{\frac{A_1''}{p(t-t')-e_1} + \frac{A_1'''}{p(t-t')-e_2} + \frac{A_1^{IV}}{p(t-t')-e_3}\right\} \\ x_2 &= \frac{p'(t-t')}{2}\left\{\frac{B_1''}{p(t-t')-e_1} + \frac{B_1'''}{p(t-t')-e_2} + \frac{B_1^{IV}}{p(t-t')-e_3}\right\} \\ x_3 &= \frac{p'(t-t')}{2}\left\{\frac{C_1''}{p(t-t')-e_1} + \frac{C_1'''}{p(t-t')-e_2} + \frac{C_1^{IV}}{p(t-t')-e_3}\right\} \end{aligned}\right.$$

Dabei haben e_1, e_2, e_3 die Bedeutung $e_1 = p\,\omega$, $e_2 = p\,(\omega + \omega')$, $e_3 = p\,\omega'$, und es besteht dann zwischen e_1, e_2, e_3 die Relation

20
$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

Hätten wir ω, $\omega + \omega'$, ω' in anderer Weise den Grössen t'', t''', t^{IV} zugeordnet, so würden hierdurch die Indices der Grössen e_1, e_2, e_3 unter einander vertauscht worden sein, was aber auf die Gültigkeit der nachfolgenden Betrachtungen keinen Einfluss hat. In Beziehung auf die so erhaltenen Funktionen fragen wir uns jetzt, können sie einem Differentialgleichungssystem von der bisher immer betrachteten Form oder einem ihm ähnlichen genügen? Da nun die drei mit gewissen Constanten multiplicirten σ Quotienten, als deren Verallgemeinerung diese Funktionen aufzufassen sind, die allgemeinen Integrale des betrachteten Differentialgleichungssystems bilden, wenn man die Coefficienten ausser a_1, b_2, c_3 gleich Null setzt, so fragen wir uns zunächst, können vielleicht die Funktionen 19 das allgemeine Integral unseres Differentialgleichungssystems bilden, wenn zwischen den Coefficienten gewisse Bedingungsgleichungen bestehen? Soll dies der Fall sein, so müssen die Constanten t', ω, ω' in den Funktionen 19 von den Coefficienten a, b, c unabhängig sein, denn das allgemeine Integral enthält drei willkürliche Constante. Wir bilden nun die Entwickelungen 9 für die Funktionen 19 und setzen diese in das Differentialgleichungssystem ein, dann müssen wieder die Coefficienten gleich hoher Potenzen übereinstimmen und wir setzen jetzt die constanten Glieder auf beiden Seiten einander gleich. Die sich ergebenden Gleichungen sind ein specieller Fall eines früheren Gleichungssystems, es kommen in denselben die Coefficienten A_3, B_3, C_3 vor, die sich für die Funktionen 19 darstellen in der Form:

$$\begin{aligned} A_3 &= -A_1''\,e_1 - A_1'''\,e_2 - A_1^{IV}\,e_3, \\ B_3 &= -B_1''\,e_1 - B_1'''\,e_2 - B_1^{IV}\,e_3, \\ C_3 &= -C_1''\,e_1 - C_1'''\,e_2 - C_1^{IV}\,e_3, \end{aligned}$$

oder nach der Relation 20:

$$\begin{aligned} A_3 &= -(A_1'' - A_1^{IV})\,e_1 - (A_1''' - A_1^{IV})\,e_2, \\ B_3 &= -(B_1'' - B_1^{IV})\,e_1 - (B_1''' - B_1^{IV})\,e_2, \\ C_3 &= -(C_1'' - C_1^{IV})\,e_1 - (C_1''' - C_1^{IV})\,e_2. \end{aligned}$$

Nach Einführung dieser Ausdrücke wird die erste der erwähnten Gleichungen:

21
$$\left\{\begin{aligned} &-\left\{(a_2 C_1' + a_3 B_1' - 1)(A_1'' - A_1^{IV}) + (a_1 C_1' + a_3 A_1')(B_1'' - B_1^{IV}) + (a_1 B_1' + a_2 A_1')(C_1'' - C_1^{IV})\right\} e_1 \\ &-\left\{(a_2 C_1' + a_3 B_1' - 1)(A_1''' - A_1^{IV}) + (a_1 C_1' + a_3 B_1')(B_1''' - B_1^{IV}) + (a_1 B_1' + a_2 A_1')(C_1''' - C_1^{IV})\right\} e_2 = 0 \end{aligned}\right.$$

Da ferner nach den Gleichungen 2 $-A_1'' = a_1 B_1'' C_1'' + a_2 C_1'' A_1'' + a_3 A_1'' B_1''$ ist, so ist

$$(a_2 C_1' + a_3 B_1' - 1) A_1'' + (a_1 C_1' + a_3 A_1') B_1'' + (a_1 B_1' + a_2 A_1') C_1''$$
$$= a_1 (C_1' B_1'' + B_1' C_1'' + B_1'' C_1'') + a_2 (C_1' A_1'' + A_1' C_1'' + C_1'' A_1'') + a_3 (B_1' A_1'' + A_1' B_1'' + A_1'' B_1'')$$
$$= a_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + a_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + a_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'')$$
$$- a_1 B_1' C_1' - a_2 C_1' A_1' - a_3 A_1' B_1'$$
$$= a_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + a_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + a_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') + A_1'.$$

Ebenso findet sich

$$(a_2 C_1' + a_3 B_1' - 1) A_1''' + (a_1 C_1' + a_3 A_1') B_1''' + (a_1 B_1' + a_2 A_1') C_1''' =$$
$$a_1 (B_1' + B_1''') (C_1' + C_1''') + a_2 (C_1' + C_1''') (A_1' + A_1''') + a_3 (A_1' + A_1''') (B_1' + B_1''') + A_1'.$$
$$(a_2 C_1' + a_3 B_1' - 1) A_1^{IV} + (a_1 C_1' + a_3 A_1') B_1^{IV} + (a_1 B_1' + a_2 A_1') C_1^{IV} =$$
$$a_1 (B_1' + B_1^{IV}) (C_1' + C_1^{IV}) + a_2 (C_1' + C_1^{IV}) (A_1' + A_1^{IV}) + a_3 (A_1' + A_1^{IV}) (B_1' + B_1^{IV}) + A_1'.$$

Soll nun die Gleichung 21 für willkürliche Werthe von ω, ω', folglich auch von e_1, e_2 bestehen, so ist dieses nur dadurch möglich, dass die Coefficienten von e_1 und e_2 verschwinden und dieses giebt denn nach den soeben entwickelten Formeln die folgende Doppelgleichung:

$$22 \quad \begin{cases} a_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + a_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + a_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') = \\ a_1 (B_1' + B_1''') (C_1' + C_1''') + a_2 (C_1' + C_1''') (A_1' + A_1''') + a_3 (A_1' + A_1''') (B_1' + B_1''') = \\ a_1 (B_1' + B_1^{IV}) (C_1' + C_1^{IV}) + a_2 (C_1' + C_1^{IV}) (A_1' + A_1^{IV}) + a_3 (A_1' + A_1^{IV}) (B_1' + B_1^{IV}). \end{cases}$$

Addirt man die hier einander gleichgesetzten Grössen, so erhält man zur Summe den Werth Null, denn man hat:

$$\sum_{k=1}^{4} A_1^{(k)} = 0 = a_1 \Sigma B_1^{(k)} C_1^{(k)} + a_2 \Sigma C_1^{(k)} A_1^{(k)} + a_3 \Sigma A_1^{(k)} B_1^{(k)}$$
$$\Sigma B_1^{(k)} = 0 = b_1 \Sigma B_1^{(k)} C_1^{(k)} + b_2 \Sigma C_1^{(k)} A_1^{(k)} + b_3 \Sigma A_1^{(k)} B_1^{(k)}$$
$$\Sigma C_1^{(k)} = 0 = c_1 \Sigma B_1^{(k)} C_1^{(k)} + c_2 \Sigma C_1^{(k)} A_1^{(k)} + e^2 \Sigma A_1^{(k)} B_1^{(k)}$$

und daraus, weil Δ von Null verschieden:

$$\Sigma B_1^{(k)} C_1^{(k)} = 0, \ \Sigma C_1^{(k)} A_1^{(k)} = 0, \ \Sigma A_1^{(k)} B_1^{(k)} = 0,$$

folglich ist

$$(B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + (B_1' + B_1''') (C_1' + C_1''') + (B_1' + B_1^{IV}) (C_1' + C_1^{IV})$$
$$= (B_1' + B_1'' + B_1''' + B_1^{IV}) C_1' + B_1' (C_1' + C_1'' + C_1''' + C_1^{IV})$$
$$+ B_1' C_1' + B_1'' C_1'' + B_1''' C_1''' + B_1^{IV} C_1^{IV} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich, dass der Coefficient von a_2, sowie der von a_3 in der Summe der in der Doppelgleichung 22 einander gleichgesetzten Grössen Null ist, diese Summe ist daher auch gleich Null. Soll nun aber eine Summe von mehreren unter einander gleichen Grössen Null sein, so muss dieses von jeder einzelnen gelten, man hat daher:

$$a_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + a_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + a_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') = 0$$
$$a_1 (B_1' + B_1''') (C_1' + C_1''') + a_2 (C_1' + C_1''') (A_1' + A_1''') + a^3 (A_1' + A_1''') (B_1' + B_1''') = 0$$
$$a_1 (B_1' + B_1^{IV}) (C_1' + C_1^{IV}) + a_2 (C_1' + C_1^{IV}) (A_1' + A_1^{IV}) + a_3 (A_1' + A_1^{IV}) (B_1' + B_1^{IV}) = 0.$$

Diesen Gleichungen können wir 6 andere zur Seite stellen, welche aus ihnen dadurch hervorgehen, dass wir die Grössen a_1, a_2, a_3 ersetzen durch b_1, b_2, b_3, c_1 c_2, c_3, es sind dies die Gleichungen, welche sich durch Gleichsetzen der constanten Glieder aus der zweiten und dritten unserer Differentialgleichungen ergeben. Von den so sich ergebenden 9 Relationen fassen wir je drei so zusammen, dass die zweite und dritte aus der ersten hervorgeht durch Vertauschung von a_1, a_2, a_3 mit b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3. Auf diese Weise erhalten wir wieder drei Gruppen, deren eine ist:

$$a_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + a_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + a_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') = 0$$
$$b_1 (B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') + b_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + b_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') = 0$$
$$c_3 (B_1 + B_1') (C_1' + C_1'') + c_2 (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') + c_3 (A_1' + A_1'') (B_1' + B_1'') = 0.$$

Da hier die Determinante der Coefficienten Δ von Null verschieden ist, so erhält man:

23
$$(B_1' + B_1'') (C_1' + C_1'') = 0, (C_1' + C_1'') (A_1' + A_1'') = 0, (A_1' + A_1') (B_1' + B_1'') = 0.$$
Zu diesen Gleichungen liefert die Betrachtung der beiden übrigen Gruppen noch hinzu:
$$(B_1' + B_1''') (C_1' + C_1''') = 0, (C_1' + C_1''') (A_1' + A_1''') = 0, (A_1' + A_1''') (B_1' + B_1''') = 0$$
$$(B_1' + B_1^{IV}) (C_1' + C_1^{IV}) = 0, (C_1' + C_1^{IV}) (A_1' + A_1^{IV}) = 0, (A_1' + A_1^{IV}) (B_1' + B_1^{IV}) = 0.$$

Aus diesen 9 Relationen wollen wir jetzt den Schluss ziehen, dass die ausserhalb der Diagonale der Glieder a_1, b_2, c_3 stehenden Coefficienten in dem Coefficientensystem (a, b, c) gleich Null sein müssen. Die ersten drei Gleichungen nämlich in den Relationen 23 verlangen, dass zwei der drei Summen $A_1' + A_1''$, $B_1' + B_1''$, $C_1' + C_1''$ den Werth Null haben. Nehmen wir etwa an

$$A_1' + A_1'' = 0, B_1' + B_1'' = 0, \text{ also } A_1' = - A_1'', B_1' = - B_1''.$$

Ferner müssen zwei der drei Summen $A_1' + A_1'''$, $B_1' + B_1'''$, $C_1' + C_1'''$ Null sein. Dieses können nun nicht die den Summen $A_1' + A_1''$, $B_1' + B_1''$ entsprechenden $A_1' + A_1'''$, $B_1' + B_1'''$ sein, wie man auf folgende Weise erkennt: Da alsdann $A_1''' = A_1''$, $B_1''' = B_1''$ wäre, so müsste auch $C_1'' = C_1'''$ sein. Aus den ersten beiden Gleichungen nämlich in 2 folgt, wenn man hier nach einander $A_1'' B_1'' C_1''$, $A_1''' B_1''' C_1'''$ einsetzt, und dann die erste von der ersten, die zweite von der zweiten Gleichung subtrahirt:

$$0 = a_1 B_1'' (C_1'' - C_1''') + a_2 A_1'' (C_1'' - C_1''')$$
$$0 = b_1 B_1'' (C_1'' - C_1''') + b_2 A_1'' (C_1'' - C_1''')$$

woraus, da die Determinante c_3' von Null verschieden sein soll, folgt $B_1'' (C_1'' - C_1''') = 0$, $A_1'' (C_1'' - {}_1''') = 0$, also $C_1'' - C_1''' = 0$. Es stimmen also in dem gedachten Fall auch die Grössen C_1'' und C_1''' mit einander überein. Was nun das 4. Werthsystem $A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}$ anbetrifft, so müsste, wie die Relationen 14 zeigen $A_1^{IV} = A_1'$, $B_1^{IV} = B_1'$, mithin auch $C_1^{IV} = C_1'$ sein und die vier Werthsysteme wären also die folgenden: $A_1' B_1' C_1'$, $- A_1' - B_1' C_1'$, $- A_1' - B_1' C_1''$, $A_1' B_1' C_1'$.

Nun müsste aber auch $C_1' + C_1'' + C_1''' + C_1' = 0$ sein, mithin $C_1'' = - C_1'$, was aber unmöglich ist, weil in diesem Falle $A_1' B_1' C_1'$, $- A_1' - B_1' - C_1'$ gleichzeitig den Gleichungen 2 genügen müssten, wovon wir bereits früher die Unmöglichkeit nachgewiesen haben.

Wir werden daher anzunehmen haben, dass entweder $A_1' + A_1''' = 0$, $C_1' + C_1''' = 0$, oder $B_1' + B_1''' = 0$, $C_1 + C_1''' = 0$ sei. Wählen wir den letzten Fall, so haben wir also $B_1''' = - B_1'$, $C_1''' = - C_1'$. Was dann das vierte Werthsystem anbetrifft, so bleibt hier nur übrig $A_1^{IV} = - A_1'$, $C_1^{IV} = - C_1'$, denn für jeden der beiden andern Fälle $A_1^{IV} = - A_1'$, $B_1^{IV} = - B_1'$ und $B_1^{IV} = - B_1'$, $C_1^{IV} = - C_1'$ müsste das vierte Werthsystem mit einem der beiden vorhergehenden in zwei Gliedern übereinstimmen, was nicht möglich ist, wie man sich nach dem Vorhergehenden leicht selbst beweisen wird. Die vier Werthsysteme werden daher die folgenden:

$$(A_1' B_1' C_1') = (A_1', B_1', C_1')$$
$$(A_1'' B_1'' C_1'') = (- A_1', - B_1', C_1'')$$
$$(A_1''' B_1''' C_1''') = (A_1''', - B_1', - C_1')$$
$$(A_1^{IV} B_1^{IV} C_1^{IV}) = (- A_1', B_1^{IV}, - C_1').$$

Beachtet man ausserdem die Relation 14, so bestimmen sich auch die Grössen C_1'', A_1''', B_1^{IV}, so dass die vier Werthsysteme die Gestalt annehmen:

$$(A_1', B_1', C_1'), (-A_1', -B_1', C_1'), (A_1', -B_1', -C_1'), (-A_1', B_1', -C_1').$$

Sollen nun aber die vier Systeme, welche den Gleichungen 2 genügen, diese Gestalt haben, so müssen die sämmtlichen Glieder ausser a_1, b_2, c_3 verschwinden. Setzen wir nämlich in die dritte Gleichung in 2 ein das erste und dritte Werthsystem, so erhalten wir:

$$-C_1' = c_1 B_1 C_1' + c_2 C_1' A_1' + c_3 A_1' B_1'$$
$$+C_1' = c_1 B_1' C_1' - c_2 C_1' A_1' - c_3 A_1' B_1'$$

mithin
$$0 = c_1 B_1' C_1', c_1 = 0.$$

Setzen wir ebenfalls in die dritte Gleichung von 2 das erste und vierte Werthsystem ein, so führt dies zu der Gleichung $c_2 = 0$. Ebenso zeigt man, dass auch $b_1 = b_3 = 0$ ist, indem man in der zweiten Gleichung von 2 nach einander einsetzt das Werthsystem 1 u. 2 nnd 1 u. 3, und dass $a_2 = a_3 = 0$ ist, indem man in der ersten Gleichung von 2 nach einander einsetzt die Werthsysteme 1, 2 und 1, 4.

Die Aufstellung der vier Werthsysteme A, B, C in der soeben angegebenen Form ist noch mit einiger Willkürlichkeit behaftet. Man hätte z. B. statt $A_1' + A_1'' = 0$, $B_1' + B_1'' = 0$ zu wählen, auch $A_1' + A_1'' = 0$, $C_1' + C_1'' = 0$, oder $B_1' + B_1'' = 0$, $C_1' + C_1'' = 0$ wählen können. Wie man aber auch bei der Aufstellung der Werthsysteme verfährt, das System der vier Werthsysteme A, B, C unterscheidet sich zwar von dem soeben aufgestellten, aber nur in der Aufeinanderfolge der einzelnen Systeme A, B, C und man gelangt daher auch stets zu dem Schluss, dass die sämmtlichen Coefficienten ausser a_1, b_2, c_3 gleich Null sein müssen. Dann aber geben die mit gewissen Constanten multiplicirten Funktionen $\frac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')}$, $\frac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')}$, $\frac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')}$, also drei elliptische Funktionen 2. Gr. das allgemeine Integral des Differentialgleichungssystems, wir erhalten daher das Resultat:

> VI . . . Drei elliptische Funktionen 4. Gr., die in ihren Perioden übereinstimmen, bilden nie das allgemeine Integral eines Differentialgleichungssystems der betrachteten Form, in welchem die Coefficienten keiner der Gleichungen 1 genügen.

Wir lassen jetzt die Forderung fallen, dass die in den Formeln 19 aufgestellten Funktionen das allgemeine Integral bilden sollen. Wir fragen uns daher: können sie überhaupt unserem Differentialgleichungssystem oder einem ähnlichen genügen? Dies ist nun in der That der Fall, wie wir jetzt zeigen wollen. Hierzu müssen wir uns zunächst die Frage beantworten, wie wir es überhaupt erreichen wollen, vier Werthsysteme A, B, C herzustellen, welche den Gleichungen 2 genügen und für welche die Relationen 14 bestehen. Dieses wird nun aber dadurch zu bewirken sein, dass wir die vier von den Coefficienten a, b, c abhängigen Werthsysteme A_1, B_1, C_1 wählen und nun die Coefficienten der dritten Potenzen in den Gleichungen, welche die Grössen A_1, B_1, C_1 bestimmen, gleich Null setzen. Um diese Bedingungsgleichungen aufzustellen, müssen daher noch die Gleichungen entwickelt werden, welche die Grössen A und B bestimmen, denn die die Grösse C bestimmende Gleichung ist bereits aufgestellt in der Gestalt der reciproken Gleichung von 9. Wir halten uns mit der Herleitung dieser Gleichungen nicht weiter auf. Nach der bereits früher gegebenen Herleitung der Gleichung 5 wird man leicht finden, dass die u_1, u_2 bestimmenden Gleichungen sind:

24
$$\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 + u_1 \\ c_1 & c_2 + u_1 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 + u_1 \\ c_2 + u_1 & c_3 \end{vmatrix} + u_1 \begin{vmatrix} b_3 + u_1 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 + u_1 \end{vmatrix} = 0. \\
&\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 + u_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + u_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 + u_2 \\ c_1 + u_2 & c_3 \end{vmatrix} + u_2 \begin{vmatrix} a_3 + u_2 & a_2 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 + u_2 & c_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man nun, dass die Coefficienten der höchsten Potenzen in den reciproken Gleichungen von 24 und 5 nichts anderes sind als die constanten Glieder in 24 und 5, während die Coefficienten der dritten Potenzen in den reciproken Gleichungen von 24 und 5 die Coefficienten der ersten Potenzen in 24 und 5 sind, so wird, wenn man die constanten Glieder in diesen Gleichungen bezeichnet mit K_0, K_0', K_0'' die Coefficienten der ersten Potenzen mit K_1, K_1', K_1'', man die verlangten Gleichungen darstellen könne in der Form:

25
$$\frac{K_1}{K_0} = 0, \quad \frac{K_1'}{K_0'} = 0, \quad \frac{K_1''}{K_0''} = 0.$$

Es fragt sich nun, wie sich diese Gleichungen erfüllen lassen. Diese Frage müssen wir zunächst erledigen, von vorn herein kann man überhaupt nicht sagen, ob es möglich ist, diesen Gleichungen zu genügen, es könnten ja z. B. die linken Seiten dieser Gleichungen sich auf Constante reduciren. Wir wollen nun, um zu einer bestimmteren Form dieser Gleichungen zu gelangen, folgendes nachweisen: Nimmt man die Coefficienten in zwei Horizontalreihen in den Coefficientensystemen (a, b, c) als die gegebenen an, und betrachtet die der dritten Horizontalreihe als die durch diese Gleichungen zu bestimmenden, so giebt es unendlich viele Lösungen der Gleichungen $K_1 = 0$, $K_1' = 0$, $K_1'' = 0$, für welche die Nenner K_0, K_0', K_0'' Null werden, von welchen wir also nicht sagen können, dass die Gleichungen 25 für dieselben bestehen; sieht man aber von diesen Lösungen ab, so giebt es noch eine Lösung, die durch ein System dreier in Beziehung auf die zu bestimmenden Grössen linearer Gleichungen geliefert wird, und für diese Lösung verschwinden die Nenner K_0, K_0', K_0'' im allgemeinen nicht. Wir geben jetzt zunächst die Ausdrücke für K_1, K_1', K_1''. Mit Hülfe der früher eingeführten Abkürzungszeichen a_1', a_2', a_3' . . . für die Unterdeterminanten von a_1, a_2, a_3 . . . , stellen sich diese Ausdrücke in der folgenden Form dar:

$$K_1'' = (a_3' + c_1')\, b_2' + b_3'\, b_1' - (a_3 + c_1)\, \Delta$$
$$K_1' = (b_1' + a_2')\, a_3' + c_1'\, c_2' - (b_1 + a_2)\, \Delta$$
$$K_1 = (c_2' + b_3')\, a_1' + a_2'\, a_3' - (c_2 + b_3)\, \Delta$$

Was die Grössen K_0, K_0', K_0'' anbetrifft, so sind dieses drei Produkte von je zwei Factoren, deren einer die Determinante Δ ist, während der andere eine der drei Subdeterminanten a_1', b_2', c_3' ist. Denkt man sich nun die Klammern in K_1'', K_1', K_1 aufgelöst, so erhält man drei rationale ganze Funktionen von a, b, c, deren erste in Beziehung auf b_1, b_2, b_3 vom ersten Grade ist, während die beiden andern in Beziehung auf diese Grössen vom zweiten Grade sind. Wir geben hier die Ausdrücke für K_1', K_1', K_1, geordnet nach den Grössen b_1, b_2, b_3, wobei wir nur die Grösse Δ, welche entwickelt nach den Gliedern b_1, b_2, b_3 linear ist, nicht ausschreiben:

$$K_1'' = b_1\, c_2\, b_2' - b_2\, (a_3 + c_1)\, b_2' + b_3\, a_2\, b_2' + b_3'\, b_1' - (a_3 + c_1)\, \Delta.$$
$$K_1' = b_2\, b_3 .\; a_1\, (a_3 + c_1) + b_1\, b_3 .\; a_2\, (a_3 - c_1) - b_1\, b_2\, (a_3^2 + a_1\, c_3) + b_1^2\, a_2\, c_3 - b_3^2\, a_1\, a_2$$
$$+ b_2\, a_1\, b_1' - b_1 .\, a_2\, b_1' - (b_1 + a_2)\, \Delta.$$
$$K_1 = - b_2\, b_3\, (c_1^2 + a_1\, c_3) + b_1\, b_3 .\; c_2\, (c_1 - a_3) + b_1\, b_2\, c_3\, (c_1 + a_3) + b_3^2\, a_1\, c_2 - b_1^2\, c_2\, c_3$$
$$+ b_2\, c_3\, b_3' - b_3\, c_2\, b_3' - (c_2 + b_3)\, \Delta.$$

Indem wir diese Ausdrücke gleich Null setzen, erhalten wir drei Gleichungen, von welchen wir jetzt zeigen wollen, dass sie durch zwei in Beziehung auf b_1, b_2, b_3 lineare Gleichungssysteme ersetzt werden können. Um dieses nachzuweisen, definiren wir y_1, y_2 durch die Gleichungen:

$$y_1 = b_1 c_2 b'_2 - b_2 (a_3 + c_1) b'_2 + b_3 a_2 b'_2 + b'_3 b'_1$$
$$y_2 = b_1 b'_1 + b_2 b'_2 + b_3 b'_3,$$

sodass also y_2 nichts anderes ist als Δ.

Aus diesen Gleichungen bestimmen wir b_1 und b_3, dann ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

26 $$\begin{cases} b_1 = \dfrac{y_2 a_2 b'_2 - y_1 b'_3 - b_2 . b'_2 (c_1 b'_3 - a_1 b'_1) + b'_1 b'^2_3}{b'_2 (a_2 b'_1 - c_2 b'_3)} \\ b_3 = \dfrac{y_2 c_2 b'_2 - y_1 b'_1 - b_2 . b'_2 (a_3 b'_1 - c_3 b'_3) + b'^2_1 b'_3}{b'_2 (c_2 b'_3 - a_2 b'_1)} \end{cases}$$

wobei vorausgesetzt ist, dass der Nenner $b'_2 (c_2 b'_3 - a_2 b'_1)$ von Null verschieden ist, eine Voraussetzung, welche im allgemeinen erfüllt sein wird und die auch fernerhin immer zu machen ist. Denken wir uns jetzt diese Ausdrücke für b_1 b_3 in den Ausdrücken für K'_1, K_1 eingesetzt, so stellen sich K'_1, K_1 als rationale ganze Funktionen von y_1, y_2, b_2 dar, für welche wir die Bezeichnung wählen $R_1 (y_1, y_2, b_2)$, $R_2 (y_1, y_2, b_2)$. Die die Grössen b_1, b_2, b_3 bestimmenden Gleichungen sind dann:

$$y_1 - (a_3 + c_1) y_2 = 0, \ R_1 (y_1, y_2, b_2) = 0, \ R_2 (y_1, y_2, b_2) = 0.$$

Definiren wir endlich eine dritte Funktion von b_1, b_2, b_3, y'_1 durch die Gleichung

$$y'_1 = y_1 - (a_3 + c_1) y_2,$$

so sind die in Rede stehenden Gleichungen identisch mit

$$y'_1 = 0, \ R_1 \left(y'_1 + (a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2\right) = 0, \ R_2 \left(y'_1 + (a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2\right) = 0$$

und dieses Gleichungssystem ist offenbar identisch mit

$$y'_1 = 0, \ R_1 \left((a_3 + c_1), y_2, y_2, b_2\right) = 0, \ R_2 \left((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2\right) = 0.$$

Die Funktionen $R_1 \left((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2\right)$, $R_2 \left((a_3 + c_1) y_2, y_2, b_2\right)$ werden nun aus den Ausdrücken für K'_1, K_1 dadurch hervorgehen, dass man an Stelle von b_1 b_3 Ausdrücke einführt, welche aus den Formeln 26 sich ergeben dadurch, dass man y_1 durch $(a_3 + c_1) y_2$ ersetzt. Die Ausdrücke, welche für b_1, b_3 in den Formeln für K'_1, K_1 einzuführen sind, sind dann die folgenden:

$$\text{für } b_1: \ \frac{y_2 k_1 - b_2 k_4 + b'_1 b'^2_3}{k_3}$$

$$\text{für } b_3: \ \frac{y_2 k_2 - b_2 k_5 + b'^2_1 b'_3}{- k_3}$$

wobei k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 die folgende Bedeutung haben:

$$k_1 = a_2 b'_2 - (a_3 + c_1) b'_3, \ k_2 = c_2 b'_2 - (a_3 + c_1) b'_1$$
$$k_3 = b'_2 (a_2 b'_1 - c_2 b'_3), \ k_4 = b'_2 (c_1 b'_3 - a_1 b'_1), \ k_5 = b'_2 (a_3 b'_1 - c_3 b'_3).$$

Ausser diesen Abkürzungszeichen führen wir noch die folgenden ein:

$$C_1 = (a_3 - c_1) k_1 k_2 - c_3 k_1^2 + a_1 k_2^2$$
$$C_2 = - (a_3 - c_1) (k_2 k_4 + k_1 k_5) + 2 c_3 k_1 k_4 - 2 a_1 k_2 k_5$$
$$C_3 = (a_3 - c_1) (k_2 b'_3 + k_1 b'_1) + 2 a_1 b'_1 k_2 - 2 c_3 b'_3 k_1.$$

Mit Hülfe dieser Abkürzungszeichen lassen sich dann die Funktionen R_1, R_2 folgendermassen darstellen:

$$R_1\ \Big((a_3+c_1)\,y_2, y_2, b_2\Big) = -\frac{y_2}{k_3^2}\times$$

$$\Big\{y_2\, a_2\, C_1 + b_2\Big[a_2\, C_2 + k_3\Big(a_1(a_3+c_1)k_2 + (a_3^2 + a_1\, c_3)\,k_1\Big)\Big] + b_1\, k_3^2 + a_2 b'_1\, b'_3\, C_3 + a_2\, k_3\,(b'_1\, k_1 + k_3)\Big\}$$

$$R_2\ \Big((a_1+c_1)\,y_2, y_2, b_2\Big) = \frac{y_2}{k_3^2}\times$$

$$\Big\{y_2\, c_2\, C_1 + b_2\Big[c_2\, C_2 + k_3\Big((c_1^2 + a_1\, c_3)\,k_2 + c_3\,(a_3+c_1)\,k_1\Big)\Big] - b_3\, k_3^2 + c_2\, b'_1\, b'_3\, C_3 + c_2\, k_3\,(b'_3\, k_2 - k_3)\Big\}$$

In diesen Ausdrücken finden sich keine von y_2 unabhängigen Glieder vor, diese Glieder heben sich sämmtlich gegen einander fort. Wir müssen aus Mangel an Raum darauf verzichten, dieses durch wirkliches Einsetzen der für b_1 b_3 einzuführenden Ausdrücke nachzuweisen, wie wir uns überhaupt darauf beschränken, den Gedankengang dieser Rechnung anzugeben, während wir die Ausführung der mechanischen Rechenoperationen unterlassen.

Die für C_1, C_2, C_3 angegebenen Ausdrücke gestatten noch gewisse Umformungen, welche uns die Abkürzungszeichen k_4, k_5 entbehren lassen und welche ausserdem erkennen lassen, dass die Ausdrücke durch k_3 divisibel sind. Wir geben hier die durch die angedeuteten Umformungen für C_1, C_2, C_3 sich ergebenden Ausdrücke

$$C_1 = k_3\,(b'_2 - 2\,(a_2 + c_1)^2)$$
$$C_2 = -2\,b'_2\,k_3\,(a_3^2 + c_1^2 + a_3\,c_1 + a_1\,c_3)$$
$$C_3 = 3\,k_3\cdot(a_3 + c_1).$$

Führt man dieses in den Ausdrücken für R_1, R_2 ein, so kann man aus den Ausdrücken in den geschweiften Klammern k_3 absondern. Die übrig bleibenden Ausdrücke werden nun lineare Funktionen von b_1, b_1, b_3, wenn man $y_2 = b_1\,b'_1 + b_2\,b'_2 + b_3\,b'_3$ einsetzt. Als solche mögen sie mit $F_1\,(b_1, b_2, b_3)$, $F_2\,(b_1, b_2, b_3)$ bezeichnet werden. Um sie darzustellen, führen wir noch die Zeichen ein

$$g_1 = b'_2 - 2\,(a_3 + c_1)^2,\quad g_2 = b'_2\,(b'_2 + 4\,(a_3 + c_1)^2),\quad g_3 = 3\,(a_3 + c_1)\,b'_1\,b'_3.$$

Dann erhält man:

$$F_1\,(b_1 b_2 b_3) = b_1\,(a_2 b'_1 g_1 + k_3) - b_2\,(a_2 g_2 - a_1\,(a_3 + c_1)\,k_2 - (a_3^2 + a_1 c_3)\,k_1) + b_3 a_2 b'_3 g_1 + a_2\,(g_3 + b'_1 k_1 + k_3)$$
$$F_2\,(b_1 b_2 b_3) = b_1 c_2 b'_1 g_1 - b_2\,(c_2 g_2 - c_3\,(a_3 + c_1)\,k_1 - (c_1^2 + a_1 c_3)\,k_2) + b_3\,(c_2 b'_3 g_1 - k_3) + c_2\,(g_3 + b'_3 k_2 - k_3)$$

Die zur Bestimmung von b_1, b_2, b_3 dienenden Gleichungen sind nun die folgenden:

27 $$\begin{cases} y_1 - (a_3 + c_1)\,y_2 = 0 \\ y_2\,F_1\,(b_1, b_2, b_3) = 0,\ y_2\,F_2\,(b_1, b_2, b_3) = 0. \end{cases}$$

Man sieht sofort, dass dieses Gleichungssystem in die beiden anderen in Beziehung auf b_1, b_2, b_3 linearen zerfällt.

I. $y_1 - (a_3 + c_1)\,y_2 = 0,\ y_2 = 0$

II. $y_1 - (a_3 + c_1)\,y_2 = 0,\ F_1\,(b_1, b_2, b_3) = 0,\ F_2\,(b_1, b_2, b_3) = 0.$

Das Gleichungssystem I. ist identisch mit

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0$$

und dieses hat unendlich viele Lösungen, welche von den Formeln 26 dargestellt werden, wenn man in diesen $y_1 = y_2 = 0$ setzt. Daraus geht dann hervor, die Gleichungen $K_1 = 0$, $K'_1 = 0$, $K''_1 = 0$

werden durch unendlich viele Werthsysteme b_1, b_2, b_3 befriedigt, für welche $y_2 = 0$, somit die Determinante Δ gleich Null wird, und für welche folglich auch die Nenner K_0, K'_0, K''_0 verschwinden. Ausser diesen den Gleichungen $K_1 = 0$, $K'_1 = 0$, $K''_1 = 0$ genügenden Werthsystemen. giebt es nur noch ein diesen Gleichungen genügendes Werthsystem, welches durch die Gleichungen II. geliefert wird und für dieses Werthsystem nun wird im Allgemeinen keiner der Nenner K_0, K'_0, K''_0 verschwinden. Um dieses zu zeigen brauchen wir nur zu zeigen, dass für einen speciellen Fall die Gleichungen II eine Lösung liefern, für welche weder Δ, noch eine der Subdeterminanten a'_1, b'_2, c'_3 verschwindet. Hierzu wählen wir den einfachen Fall, dass a_1 a_2 a_3 c_1 c_2 c_3 die folgenden Werthe haben, $a_1 = a_2 = a_3 = c_1 = c_2 = 1$, $c_3 = 2$. Für diesen Fall ist $k_3 = -1$ von Null verschieden, wir können daher für diesen Fall die vorige Schlussfolgerung gelten lassen, also annehmen, dass die beiden Gleichungensysteme I. u. II. das Gleichungssystem $K_1 = 0$, $K'_1 = 0$, $K''_1 = 0$ ersetzen. Die Gleichungen II. werden nun für diesen Fall:

$$3\,b_1 - 4\,b_2 + b_3 = 0$$

$$3\,b_1 - 4\,b_2 = 1$$

$$7\,b_1 - 4\,b_2 + b_3 = -1$$

sie führen zu der Lösung $b_1 = -\frac{1}{4}$, $b_2 = -\frac{7}{16}$, $b_3 = -1$, für welche weder die Determinante Δ noch eine der Subdeterminanten a'_1, b'_2, c'_3 verschwindet.

Es kam uns nun mit dieser Untersuchung nur darauf an, zu zeigen, dass die Bedingung, es solle $K_1 = 0$, $K'_1 = 0$, $K''_1 = 0$ sein und gleichzeitig keine der Gleichungen bestehen $\Delta = 0$, $a'_1 = 0$, $b'_2 = 0$, $c'_3 = 0$, unter welcher Bedingung keine der Gleichungen besteht $K_0 = 0$, $K'_0 = 0$, $K''_0 = 0$, nichts Widersprechendes in sich enthält; es hat uns diese Untersuchung noch mehr gezeigt, denn wir haben gesehen, dass, um solche Coefficientensysteme, welche dieser Bedingung genügen, zu erhalten, man die Coefficienten in zwei Horizontalreihen willkürlich annehmen kann und dass alsdann diejenigen der dritten durch ein System linearer Gleichungen bestimmt werden. Für ein jedes solches Coefficientensystem nun werden die vier von den Coefficienten abhängigen Werthsysteme A_1 B_1 C_1 den Relationen 14 genügen und wir können daher diese Werthsysteme zur Bildung der elliptischen Funktionen 19 benutzen, denn bilden wir jetzt die Entwickelungen der Funktionen 19 in der Nähe einer beliebigen Unendlichkeitsstelle und setzen dieselben in unser Differentialgleichungssystem ein, so werden die Coefficienten der Minuspotenzen auf beiden Seiten übereinstimmen. Setzen wir daher

$$\frac{dx_1}{dt} - a_1\,x_2\,x_3 - a_2\,x_3\,x_1 - a_3\,x_1\,x_2 = -\varphi_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} - b_1\,x_2\,x_3 - b_2\,x_3\,x_1 - b_3\,x_1\,x_2 = -\varphi_2(t)$$

$$\frac{dx_3}{dt} - c_1\,x_2\,x_3 - c_2\,x_3\,x_1 - c_3\,x_1\,x_2 = -\varphi_3(t)$$

so werden die Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\varphi_3(t)$ an keiner Stelle im Endlichen unendlich, diese Funktionen sind aber doppelt periodisch, sie müssen sich daher auf 3 Constante reduciren. Die Natur dieser Constanten haben wis jetzt noch zu untersuchen. Es sind nun offenbar diese Constanten keine andern, als die constanten Glieder in den Entwickelungen von φ_1, φ_2, φ_3 in der Nähe einer beliebigen Unendlichkeitsstelle, etwa t'. Diese Constante ist für φ_1 bereits entwickelt in der Gestalt der linken Seite der Gleichung 21.

Bezeichnen wir nun die in der Formel 22 einander gleichgesetzten Grössen der Reihe nach mit α_1, α_2, α_3, so kann man für die linke Seite der Gleichung 21 schreiben:

$$S_1 = -(\alpha_1 - \alpha_3)\, e_1 - (\alpha_2 - \alpha_3)\, e_3$$

und dieses ist die Constante, auf welche sich $\varphi_1(t)$ reducirt. Die Constanten, auf welche sich φ_2 und φ_3 reduciren, ergeben sich hieraus, wie man leicht erkennt, durch Vertauschung von a_1, a_2, a_3 mit resp. b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3. Bezeichnet man daher die aus α_1, α_2, α_3 dadurch hervorgehenden Grössen, dass man a_1, a_2, a_3 mit b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 vertauscht mit β_1, β_2, β_3, γ_1, γ_2, γ_3, so ergeben sich für die Constanten, auf welche sich $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ reduciren, und welche bezeichnet werden mögen bezüglich mit S_2, S_3, die Werthe:

$$S_2 = -(\beta_1 - \beta_3)\, e_1 - (\beta_2 - \beta_3)\, e_2, \quad S_3 = -(\gamma_1 - \gamma_3)\, e_1 - (\gamma_2 - \gamma_3)\, e_2.$$

Erinnert man sich ferner der Relation 20, so erhält man:

$$-S_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad -S_2 = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3, \quad -S_3 = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3.$$

Benutzt man ferner, was früher bewiesen ist, dass auch $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0$ ist, so folgt:

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 (e_3 - e_1) + \alpha_2 (e_3 - e_2) \\ S_2 &= \beta_1 (e_3 - e_1) + \beta_2 (e_3 - e_2) \\ S_3 &= \gamma_1 (e_3 - e_1) + \gamma_2 (e_3 - e_2). \end{aligned}$$

Dieses ist nun die Form, welche wir für S_1, S_2, S_3 ableiten wollen. Es zeigt uns diese Form, dass die Constanten S_1, S_2, S_3 lineare homogene Funktionen zweier Grössen sind, denn setzen wir $e_3 - e_1 = x$, $e_3 - e_2 = y$, so haben wir:

28 $$S_1 = \alpha_1 x + \alpha_2 y, \quad S_2 = \beta_1 x + \beta_2 y, \quad S_3 = \gamma_1 x + \gamma_2 y.$$

Was die Grössen x, y anbetrifft, so müssen diese von einander und von Null verschieden sein, da die Grössen e_1, e_2, e_3 von einander verschieden sein müssen, weil sonst die Funktionen 19 nicht doppelt periodisch wären. Nehmen wir jetzt umgekehrt an, dass in dem Differentialgleichungssystem

29 $$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 - S_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= b_1 x_2 x_3 + b_2 x_3 x_1 + b_3 x_1 x_2 - S_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= c_1 x_2 x_3 + c_2 x_3 x_1 + c_3 x_1 x_2 - S_3 \end{aligned} \right.$$

in welchem die Coefficienten den Gleichungen 25 genügen, die Constanten S_1, S_2, S_3 durch die Gleichungen 28 von 2 Grössen x, y abhängig sind, die von einander und von Null verschieden sind. Dann ist die Lösung der Gleichungen

$$e_3 - e_1 = x, \quad e_3 - e_2 = y, \quad e_1 + e_2 + e_3 = 0$$

so beschaffen, dass keine zwei der Grössen e_1, e_2, e_3 einander gleich sind. Bildet man daher die diesen Grössen zugehörende p Funktion und darauf die Funktionen 19, so sind diese Funktionen doppelt periodische Funktionen und man kann nun schliessen, dass sie dem Differentialgleichungssystem 29 genügen. Dieser Schluss würde hinfällig werden, wenn die Funktionen x_1, x_2, x_3 nicht doppelt periodisch wären, denn dann könnte man nicht schliessen, dass sich φ_1, φ_2, φ_3 auf Constante reduciren. Was die Grössen e_1, e_2, e_3 anbetrifft, so bestimmen sich diese folgendermassen:

$$e_1 = \frac{-2x + y}{3}, \quad e_2 = \frac{-2y + x}{3}, \quad e_3 = \frac{x + y}{3}.$$

Wir sprechen das Resultat dieser Untersuchung in dem Satze aus:

Genügen die Coefficienten a, b, c in dem Differentialgleichungssystem 29 den drei Gleichungen:

30
$$\begin{cases} (a'_3 + c'_1)\, b'_2 + b'_3\, b'_1 - (a_3 + c_1)\, \Delta = 0 \\ (b'_1 + a'_2)\, c'_3 + c'_1\, c'_2 - (b_1 + a_2)\, \Delta = 0 \\ (c'_2 + b'_3)\, a'_1 + a'_2\, a'_3 - (c_2 + b_3)\, \Delta = 0 \end{cases}$$

mit der Beschränkung, dass keine der Gleichungen erfüllt sei: $\Delta = 0$, $a'_1 = 0$, $b'_2 = 0$, $c'_3 = 0$, sind ferner die Constanten S_1, S_2, S_3 von zwei untereinander und von Null verschiedenen Grössen x, y der Art abhängig, dass man hat

31
$$S_1 = \alpha_1\, x + \alpha_2\, y, \quad S_2 = \beta_1\, x + \beta_2\, y, \quad S_3 = \gamma_1\, x + \gamma_2\, y,$$

wobei

32
$$\begin{cases} \alpha_1 = a_1\, (B'_1 + B''_1)\; C'_1 + C''_1) + a_2\, (C'_1 + C''_1)\, (A'_1 + A''_1) + a_3\, (A'_1 + A''_1)\, (B'_1 + B''_1) \\ \alpha_2 = a_1\, (B'_1 + B'''_1)\, (C'_1 + C'''_1) + a_2\, (C'_1 + C'''_1)\, (A'_1 + A'''_1) + a_3\, (A'_1 + A'''_1)\, (B'_1 + B'''_1) \end{cases}$$

ist und β_1, β_2 und γ_1, γ_2 durch Vertauschung von a_1, a_2, a_3 mit b_1, b_2, b_3 und c_1, c_2, c_3 aus diesen Formeln hervorgeht, während $A'_1\; B'_1\; C'_1$, $A''_1\; B''_1\; C''_1$, $A'''_1\; B'''_1\; C'''_1$, $A^{IV}_1\; B^{IV}_1\; C^{IV}_1$ die vier von den Coefficienten a, b, c abhängigen, den Gleichungen 2 genügenden Werthsysteme in irgend einer Reihenfolge bedeuten, so kann man das Differentialgleichungssystem 29 stets durch drei elliptische Funktionen integriren, die durch die Formeln 19 dargestellt werden, wenn man unter e_1, e_2, e_3 die Grössen versteht:

$$e_1 = \frac{-2x + y}{3}, \quad e_2 = \frac{-2y + x}{3}, \quad e_3 = \frac{x + y}{3}.$$

Was die Natur der Funktionen 19 anbetrifft, so sind diese Funktionen darstellbar als 3 homogene lineare Funktionen der 3 σ Quotienten $\frac{\sigma_1\,(t-t')}{\sigma\,(t-t')}$, $\frac{\sigma_2\,(t-t')}{\sigma\,(t-t')}$, $\frac{\sigma_3\,(t-t)}{\sigma\,(t-t')}$. Bezeichnen wir, dies einzusehen, das Periodensystem der Funktionen 19 mit 4 ω, 4ω' statt mit 2 ω, 2 ω' und bestimmen wir dann drei Grössen $\lambda_1\; \lambda_2\; \lambda_3$ durch die Gleichungen

33
$$\lambda_1 = \frac{A'_1 + A''_1}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{A'_1 + A'''_1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{A'_1 + A^{IV}_1}{2}$$

so ist die Funktion $\lambda_1\, \frac{\sigma_1\,(t-t')}{\sigma\,(t-t')} + \lambda_2\, \frac{\sigma_2\,(t-t')}{\sigma\,(t-t')} + \lambda_3\, \frac{\sigma_3\,(t-t')}{\sigma\,(t-t')}$, in welcher σ, σ_1, σ_2, σ_3 in gewohnter Weise mittelst der Constanten ω, ω' gebildet sind, identisch mit der ersten der 3 Funktionen 29. In der That ist die aufgestellte Funktion als eine elliptische Funktion 4 Gr. zu bezeichnen mit dem Periodenpaar 4. ω, 4 ω', für welche die Stellen t, t' = 2 ω, t' + 2 (ω + ω'), t' + 2 ω' ein vollständiges System von incongruenten Unendlichkeitsstellen bilden. Wir haben gezeigt, dass ein vollständiges System incongruenter Unendlichkeitsstellen immer aus diesen Stellen bestehen muss, wenn die constanten Glieder der Entwickelung in der Nähe einer beliebigen Unendlichkeitsstelle verschwinden sollen, und aus diesem Umstande allein bestimmten wir die Gestalt für die Funktionen 19 so, dass nur noch die Coefficienten der minus ersten Potenzen unbestimmt blieben. Wir werden daher, da die constanten Glieder der Entwickelung in der Nähe einer Unendlichkeitsstelle auch für die soeben aufgestellte Funktion verschwinden, schliessen dürfen, dass diese Funktion mit der ersten der Funktionen

19 identisch ist, wenn auch die Coefficienten der minus ersten Potenzen mit den entsprechenden der ersten der Funktionen 19 übereinstimmen. Dieses ist nun aber der Fall, denn diese Coefficienten werden für die betrachtete Funktion

34
$$\begin{cases} \text{in der Nähe von } t-t'\colon \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A'_1 \\ \text{» » » »} \quad t-(t'+2\omega)\colon \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = A''_1 \\ \text{» » » »} \quad t-(t'+2\omega+2\omega')\colon -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = A'''_1 \\ \text{» » » »} \quad t-(t'+2\omega')\colon -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = A^{IV}_1 \end{cases}$$

Das was hier für die erste der 3 Funktionen 19 ausgeführt ist, gilt natürlich auch für die beiden übrigen, wir werden also die Funktionen 19 in der Gestalt darstellen können

35
$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \dfrac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + \lambda_2 \dfrac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + \lambda_3 \dfrac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_2 = \mu_1 \dfrac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + \mu_2 \dfrac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + \mu_3 \dfrac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} \\ x_3 = \nu_1 \dfrac{\sigma_1(t-t')}{\sigma(t-t')} + \nu_2 \dfrac{\sigma_2(t-t')}{\sigma(t-t')} + \nu_3 \dfrac{\sigma_3(t-t')}{\sigma(t-t')} \end{cases}$$

wobei dann zwischen den Grössen λ, μ, ν und A_1, B_1, C_1 die Relationen 33 und 34, sowie die folgenden bestehen:

36
$$\begin{cases} \mu_1 = \dfrac{B'_1 + B''_1}{2}, \quad \nu_1 = \dfrac{C'_1 + C''_1}{2} \\ \mu_2 = \dfrac{B'_1 + B'''_1}{2}, \quad \nu_2 = \dfrac{C'_1 + C'''_1}{2} \\ \mu_3 = \dfrac{B'_1 + B^{IV}_1}{2}, \quad \nu_3 = \dfrac{C'_1 + C^{IV}_1}{2} \end{cases}$$

37
$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = B'_1 & \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = C'_1 \\ \mu_1 - \mu_2 - \mu_3 = B''_1 & \nu_1 - \nu_2 - \nu_3 = C''_1 \\ -\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = B'''_1 & -\nu_1 + \nu_2 - \nu_3 = C'''_1 \\ -\mu_1 - \mu_2 + \mu_3 = B^{IV}_1 & -\nu_1 - \nu_2 + \nu_3 = C^{IV}_1 \end{cases}$$

Die durch die Relationen 33 und 36 bestimmten Grössen λ μ ν sind die Quadratwurzeln aus den Wurzeln dreier cubischen Gleichungen. Wir wollen unter der Resolvente einer Gleichnng 4 Gr., in welcher der Coefficient von x^3 fehlt die Gleichung verstehen

$$z^3 + \frac{a}{2} z^2 + \left(\frac{a^2}{16} - \frac{c}{4}\right) z - \frac{b^2}{64} = 0,$$

wenn die Gleichung 4. Gr. selber in der Form dargestellt ist $x^4 + a\,x^2 + b\,x + c = 0$. Bildet man in diesem Sinne die Resolvente der Gleichung für A_1, so erhält man das Werthsystem $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, wie in den Elementen der Algebra gezeigt wird, dadurch, dass man die Quadratwurzeln aus den Wurzeln der Resolvente in gewisser Weise mit einander combinirt. Ebenso erhält man das System μ_1, μ_2, μ_3 aus den Wurzeln der Resolvente der Gleichung für B_1, und das der Grössen ν_1, ν_2, ν_3 aus den Wurzeln der Resolvente der Gleichung für C_1. Man sieht also, dass man aus den Quadratwurzeln der Wurzeln der 3 Resolventen, zu welchen die Gleichungen für A_1, B_1, C_1 führen, immer 3 Systeme von Grössen $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$, $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$ zusammensetzen kann, für welche die Gleichungen 34 und 37 bestehen, wenn A'_1, B'_1, C'_1, A''_1, B''_1, C''_1, A'''_1, B'''_1, C'''_1, A^{IV}_1, B^{IV}_1, C^{IV}_1. die 4 den Gleichungen 3 genügenden Werth-

systeme in irgend einer Reihenfolge bedeuten. So wollen wir uns nun die 3 Systeme $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$, $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$ gebildet denken. Beachtet man nun, dass alsdann die Formeln 32 werden

38
$$\begin{cases} \alpha_1 = 4\ a_1\ \mu_1\ \nu_1 + 4\ a_2\ \nu_1\ \lambda_1 + 4\ a_3\ \lambda_1\ \mu_1 \\ \alpha_2 = 4\ a_1\ \mu_2\ \nu_2 + 4\ a_1\ \nu_2\ \lambda_2 + 4\ a_3\ \lambda_2\ \mu_2 \end{cases}$$

so sieht man, dass sich der letzte, die Integrabilität des Differentialgleichungssystems 29 betreffende Satz auch folgendermassen aussprechen lässt:

Man denke sich aus den Quadratwurzeln der Wurzeln der drei Resolventen der Gleichungen für A_1, B_1, C_1 die 3 Systeme $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, $\mu_1\ \mu_2\ \mu_3$, $\nu_1\ \nu_2\ \nu_3$ auf irgend eine Weise nach der soeben angegebenen Regel gebildet, findet sich dann, dass die Constanten $S_1\ S_2\ S_3$ in dem Differentialgleichungssystem 29 von 2 von einander und von Null verschiedenen Grössen nach den Formeln 31 abhängen, wo $\alpha_1\ \alpha_2$ durch die Formeln 38 gegeben sind, und $\beta_1\ \beta_2$, $\gamma_1\ \gamma_2$ aus diesen Formeln hervorgehen durch Vertauschung von $a_1\ a_2\ a_3$ mit $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$, so kann man das Differentialgleichungssystem 29 durch die 3 Funktionen 35 integriren; vorausgesetzt natürlich, dass die Coefficienten a, b, c den Gleichungen 30 mit derselben Beschränkung wie früher genügen.

Mit diesen Funktionen sind nun die sämmtlichen elliptischen Funktionen 4. Gr. erschöpft, die einem Differentialgleichungssystem von der Form 29 genügen, in welchem die Coefficienten a, b, c keine der Gleichungen 1 erfüllen. Wir bemerken dabei, dass der Satz II, obgleich nur für den Fall bewiesen, dass $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ ist, doch noch gilt, wenn auch S_1, S_2, S_3 von Null verschieden sind, in der That gilt die ganze Schlussfolgerung auch für diesen Fall. Auch das Resultat, dass die Constanten in den Entwickelungen von x_1, x_2, x_3 in der Nähe einer beliebigen Unendlichkeitsstelle stets verschwinden müssen, bleibt bestehen, dies reicht aus, um zu folgern, dass drei in ihren Periodensystemen übereinstimmende elliptische Funktionen 4. Gr., welche dem Differentialgleichungssystem 29 genügen, die Form der Funktionen 19 haben müssen, und zwar müssen hierbei die Coefficientensysteme A_1', B_1', C_1', A_1'', B_1'', C_1'', A_1''', B_1''', C_1''', A_1^{IV}, B_1^{IV}, C_1^{IV}, zwischen denen die Gleichungen 14 bestehen, den Gleichungen 2 genügen. Nehmen wir an, diese 4 Werthsysteme seien die sämmtlichen 4, den Gleichungen 2 genügenden Systeme, so gelangen wir zu den bisher immer betrachteten, den Funktionen 35 identischen Funktionen, und die Coefficienten a, b, c müssen dann den Gleichungen 30 genügen. Es bliebe daher, um zu andern Funktioneu zu gelangen, als einzige Möglichkeit übrig, die 4 Systeme A_1, B_1, C_1 nicht die sämmtlichen den Gleichungen 2 genügenden Systeme bedeuten zu lassen. Dass dieses nicht möglich ist, wollen wir jetzt noch zeigen. Dann nämlich käme unter den 4 Coefficientensystemen A_1, B_1, C_1 wenigstens eines 2 mal vor und zufolge der Relationen 14 kann man dann behaupten, dass unter den 4 den Gleichungen 2 genügenden Werthsystemen sich 3 finden, für die die Gleichungen bestehen:

$$A_1''' = -\frac{A_1' + A_1''}{2},\ B_1''' = -\frac{B_1' + B_1''}{2},\ C_1''' = -\frac{C_1' + C_1''}{2}$$

oder es müsste die Gleichung bestehen:

$$-a_1(B_1' C_1' + B_1'' C_1'') - a_2(C_1' A_1' + C_1'' A_1'') - a_3(A_1' B_1' + A_1'' B_1'') =$$
$$a_1 \frac{(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'')}{2} + a_2 \frac{(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'')}{2} + a_3 \frac{(A_1' + A_1'')(B_1' + B_1'')}{2}$$

und die aus dieser durch Vertauschung von $a_1\ a_2\ a_3$ mit $b_1\ b_2\ b_3$, $c_1\ c_2\ c_3$ hervorgehenden. Bringt man in diesen Gleichungen die linken Seiten nach rechts und beachtet, dass Δ von Null verschieden sein soll, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$(B_1' + B_1'')(C_1' + C_1'') + 2(B_1' C_1' + B_1'' C_1'') = 0$$
$$(C_1' + C_1'')(A_1' + A_1'') + 2(C_1' A_1' + C_1'' A_1'') = 0$$
$$(A_1' + A_1'')(B_1' + B_1'') + 2(A_1' B_1' + A_1'' B_1'') = 0.$$

Multiplicirt man ferner die erste dieser Gleichungen mit $A_1' + A_1''$, die zweite mit $B_1' + B_1''$, die dritte mit $C_1' + C_1''$ und zieht dann die zweite von der ersten, die dritte von der zweiten und die erste von der dritten ab, so erhält man 3 Gleichungen, die sich so schreiben lassen:

$$(B_1' - B_1'')\left(\frac{A_1'}{A_1''} - \frac{C_1''}{C_1'}\right) = 0,\ (C_1' - C_1'')\left(\frac{A_1'}{A_1''} - \frac{B_1'}{B_1''}\right) = 0,\ (A_1' - A_1')\left(\frac{B_1'}{B_1''} - \frac{C_1'}{C_1'}\right) = 0.$$

Diese Gleichungen können nicht anders bestehen, als wenn $A_1' = A_1''$, $B_1' = B_1''$, $C_1' = C_1''$ wird, denn setzen wir die letzten Factoren gleich Null, so folgt: $\frac{A_1'}{A_1''} = \frac{C_1'}{C_1''} = \frac{B_1'}{B_1''}$ und dann muss, wie wir früher zeigten, $A_1' = A_1''$, $B_1' = B_1''$, $C_1' = C_1''$ sein. Setzen wir etwa $B_1' = B_1''$, $\frac{A_1'}{A_1''} = \frac{B_1'}{B_1''}$, so folgt hieraus $A_1' = A_1''$ und dann muss auch $C_1' = C_1''$ sein. So überzeugt man sich leicht, dass nothwendig $A_1' = A_1''$, $B_1' = B_1''$, $C_1' = C_1''$ sein muss. Dies verlangt wieder, dass $A_1''' = -A_1'$, $B_1''' = -B_1'$, $C_1''' = -C_1'$ sei, was aber nicht möglich ist. Die Annahme dreier Werthsysteme somit, für welche $A_1''' = -\frac{A_1' + A_1''}{2}$, $B_1''' = -\frac{B_1' + B_1'''}{2}$, $C_1''' = -\frac{C_1' + C_1''}{2}$ ist, führt zu einem Widerspruch, ebenso also auch die Annahme von vier Coefficientensystemen $A_1\ B_1\ C_1$, die nicht mit dem System der 4, den Gleichungen 2 genügenden Wurzelsysteme übereinstimmen. Die dem Differentialgleichungssystem 29 genügenden elliptischen Funktionen 4. Gr. können daher keine andern als die aufgestellten Funktionen sein. Wir machen bei dieser Gelegenheit schliesslich noch die Bemerkung, dass die Betrachtungen, welche uns davon überzeugten, dass die drei Funktionen $C_1 \frac{\sigma_1(t - t')}{\sigma(t - t')}$, $C_2 \frac{\sigma_2(t - t')}{\sigma(t - t')}$, $C_3 \frac{\sigma_3(t - t')}{\sigma(t - t')}$ die einzigen elliptischen Funktionen 2. Gr. seien, welche dem Differentialgleichungssystem 29 genügen, wenn $S_1 = S_2 = S_3 = 0$ und die Coefficienten keine der Gleichungen 1 befriedigen, ihre Gültigkeit auch dann noch behalten, wenn wir S_1, S_2, S_3 von Null verschieden voraussetzen. Wir können daher sagen, dass wir die Aufgabe, alle elliptischen Funktionen 2. und 4. Gr. zu ermitteln, durch die ein Gleichungssystem von der Form 29, in welchem die Coefficienten a, b, c keine der Gleichungen 1 erfüllen, sich integriren lässt, vollständig gelöst haben.

VITA.

Ego Paulus Hoyer, ecclesiae evangelicae studiosus, die IV mensis Julii anni MDCCCLVI. patre Augusto Hoyer Magdeburgii natus sum. Ratione patris ad ordinem mercatorum destinatus non gymnasium sed scholam adii, quae dicitur „Realschule“ in Germania. Qua per septem annos frequentata mercatori in disciplinam traditus sum. Jam diu autem litteris mathematicis me tradere cupiens atque decem dies officiis tabernae mercatoriae alumni perfunctus istis negotiis intelligens me non idoneum esse, intermissa studia revocavi et penso scholae inter duos annos absoluto in academiam migravi Berolinensam. Ibi per quattuor annos legentes audivi viros Frobenius, Kummer, Weierstrass, Wangerin, Dove, Helmholz, Kirchhoff, Zeller, Harms, quibus in perpetuum magnam gratiam habebo.

Thesen.

1) Das Imaginäre in der mathematischen Analysis hat dieselbe Realität wie das Reelle.

2) Bei der Darstellung der Mechanik unter alleiniger Voraussetzung der Begriffe von Zeit, Raum und Materie wird die Anschauung weniger in Anspruch genommen als bei der gewöhnlichen Darstellung, unter weiterer Voraussetzung des Begriffes der Kraft, und es werden daher auch viele Schwierigkeiten vermieden, die bei dieser Darstellungsweise für das Verständniss aus der Unklarheit der Anschauung entspringen.

3) Hume's Ansichten über den Causalnexus führen uns dazu, den Begriff der Kraft als metaphysischen aus der mathematischen Behandlung der Mechanik zu entfernen.